物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.20
音波編
ブツリヨキワメヨ

1

イ．音源　ロ．媒質　ハ．音の高さ　ニ．音の大きさ　ホ．**20**　ヘ．**20000**

(1)　音の大きさは振幅で決まるので，大きい方から順に（音２），（音１），（音４），（音３）となる。

(2)　音の高さは振動数で決まるので（音１）と（音３）となる。

(3)　もっとも振動数が高いのは（音２）で **10** 目盛り（**0.01**[s]）で **5** 回振動していることから，**500**[Hz]となる。
※振動数は単位時間当たりでの振動回数で表される。

2

(1)　共鳴
(2)　うなり
(3)　反射
(4)　屈折
(5)　回折
(6)　干渉

3

(1)　点Ｏが **0** 次の強め合い，点Ｐが **1** 次の強め合いと考えられるので，波長を λ として，干渉条件から，

$$|\mathrm{BP}-\mathrm{AP}|=\frac{\lambda}{2}\times 2 \Leftrightarrow \lambda=3.0-2.6=0.40\,[\mathrm{m}]$$

※三平方の定理でもＢＰやＡＰの長さは求まるが，辺の比（**3:4:5** および **5:12:13**）を使うとすぐに求まる。

$$|経路差|=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2}\times 2m & （強め合い）\\ \dfrac{\lambda}{2}(2m+1) & （弱め合い）\end{cases}$$

(2)　（$v=f\lambda$）より，
$840\times 0.40=336\rightarrow 3.4\times 10^2\,[\mathrm{m/s}]$

(3)　（$v=f\lambda$）より，音速は変わらないので振動数を大きくすると波長が小さくなる。したがって，点Ｐで再度大きな音が聞こえたのは，経路差が変わらないことから **2** 次の強め合いと考えられる。このときの波長を λ' として，

$$|\mathrm{BP}-\mathrm{AP}|=\frac{\lambda'}{2}\times 2\times 2 \Leftrightarrow 2\lambda'=0.40 \Leftrightarrow \lambda'=0.20$$

また，求める振動数を f' として，（$v=f\lambda$）より，

$$f'=\frac{336}{0.20}=1680\rightarrow 1.7\times 10^3\,[\mathrm{Hz}]$$

(4)　ＯＰ上の任意の点Ｑでの干渉条件は，整数を m とすると，

$$|\mathrm{BQ}-\mathrm{AQ}|=\frac{0.20}{2}\times 2m$$

経路差の最大値は **0.80**[m]なので，これを満たす m は **0**，±**1**，±**2**，±**3**，±**4** となる。問題文では，点Ｐから点Ｏとは反対方向の点とあるので，負の値，および **0**，**1**，**2** は除外される。また，経路差が **0.80** [m]となるのは，直線ＡＢ上だけなので，**4** も除外される。これより，答えは $m=3$ の **1** 回となる。

4

(1)　($v=f\lambda$) より，求める波長を λ として，

$$\frac{336}{3000}=1.12\times 10^{-1}\,[\mathrm{m}]$$

(2)　Qで観測する音が大きくなったり，小さくなったりしているので干渉している。したがって，点Ｐからクインケ管の左側を通ってQに到達する音と右側を通ってQに到達する音の経路差によって，Qで聞こえる音が大きくなったり，小さくなったりする。Aを引き出していないときの経路差を 0 とすると，Aを x [m]引き出した時の経路差が $2x$ となる。整数を m として，小さい音が聞こえる干渉条件は，

$$|\text{経路差}|=2x=\frac{1.12\times 10^{-1}}{2}\times(2m+1)$$

$$\Leftrightarrow x=2.8\times 10^{-2}\times(2m+1)$$

数列と同様に考えて，$m=m$ の時の x と，$m=m+1$ の時の x はそれぞれ，$2.8\times 10^{-2}\times(2m+1)$，$2.8\times 10^{-2}\times(2(m+1)+1)$ となるので，小さい音になってから，次に小さい音になるまでにAを引き出す間隔はこれらの差の 5.6×10^{-2} [m]となる。

※数列を習っていない場合は，m の値（整数値）を代入して，その間隔を求めればよい。

（別解）

干渉条件から，経路差が 1 波長変化する毎に弱め合いの位置が現れる。Aを x 引き出すと経路差は $2x$ 変化するので，$2x=1.12\times 10^{-1}$ を満たす場合に再び小さな音となる。

5

(1)　重ね合わせの原理より，

$$Y=A(\sin 2\pi f_1 t+\sin 2\pi f_2 t)$$

(2)　$A=\pi(f_1+f_2)t$，$B=\pi(f_1-f_2)t$　として，与えられた式を用いて式変形すると，

$$Y=2A\sin\{\pi(f_1+f_2)t\}\cos\{\pi(f_1-f_2)t\}$$

(3)　(2)で求めた答えの $\sin\left\{2\pi\frac{f_1+f_2}{2}t\right\}$ と $\sin\left\{2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right\}$ の項を比較すると，前者の振動数（$\frac{f_1+f_2}{2}$）が大きく，後者の振動数（$\frac{f_1-f_2}{2}$）が小さくなる。したがって，図中の t_1 が表すのは，後者の項の半周期（振動数の逆数の半分）であるので，

$$t_1=\left(\frac{2}{f_1-f_2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{f_1-f_2}$$

※振幅で考えると，時刻 0 [s]で大きな音が聞こえ，t_1 [s]で再び大きな音が聞こえているのが分かる。これがうなりの周期となっている。

6

(1)　うなり

(2)　振動数の定義は単位時間での振動回数なので，T [s]間では２つの音叉はそれぞれ f_1T，f_2T 回振動する。これらの差が 1 となるときに，波が１つ分だけずれて強め合うので，$f_1T-f_2T=1$ となる。

(3)　(2)の答えより，うなりの周期 T は $T=\frac{1}{f_1-f_2}$ となる。単位時間当たりのうなりの回数は振動数のことなので，周期と振動数が逆数の関係にあることから，f_1-f_2 と求まる。

7

(1)　節から節までは半波長なので，求める波長を λ_1 として，

$$\frac{\lambda_1}{2}=l \Leftrightarrow \lambda_1=2l$$

(2)　$(v=f\lambda)$ より，

$$f_1=\frac{v}{\lambda_1}=\frac{v}{2l}$$

(3)　基本振動数

(4)　節から節までは半波長なので，求める波長を λ_2 として，

$$\frac{\lambda_2}{2}\times 2=l \Leftrightarrow \lambda_2=l$$

(5)　$(v=f\lambda)$ より，

$$f_2=\frac{v}{\lambda_2}=\frac{v}{l}=2\times f_1$$

(6)　節から節が m 個あると考えると，そのときの波長 λ_m は，

$$\frac{\lambda_m}{2}\times m=l \Leftrightarrow \lambda_m=\frac{2l}{m}$$

$(v=f\lambda)$ より，

$$f_m=\frac{v}{\lambda_m}=\frac{mv}{2l}=m\times f_1$$

8

(1)　力のつり合いから，弦の張力 S は重力とつり合っているので，$S=mg$ となる。したがって，

$$\sqrt{\frac{S}{\rho}}=\sqrt{\frac{mg}{\rho}}$$

(2-ア)　節から節までは半波長なので，求める波長を λ として，

$$\frac{\lambda}{2}\times 2=l \Leftrightarrow \lambda=l$$

(2-イ)　$(v=f\lambda)$ より，求める振動数を f として，

$$f=\frac{\sqrt{\frac{mg}{\rho}}}{\lambda}=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}$$

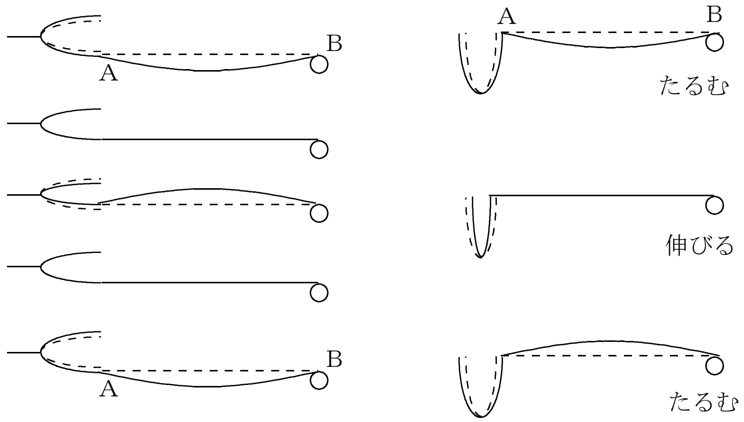
(3)　振動数が半分になるので，求める波長を λ' として，$(v=f\lambda)$ より，

$$\frac{f}{2}=\frac{\sqrt{\frac{mg}{\rho}}}{\lambda'}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}} \Leftrightarrow \lambda'=2l$$

また，２倍振動の波長の２倍になっているので，基本振動となっている。(4)　波長を $\frac{1}{2}$ 倍にするためには弦の振動数が $\frac{f}{2}$ のままなので，$(v=f\lambda)$ より，弦の振動を伝える速さを $\frac{1}{2}$ 倍にすればよい。したがって，(1) の答えから考えて，張力を $\frac{1}{4}$ 倍、すなわち，おもりの質量を $\frac{1}{4}$ 倍にすればよい。

□■物理的思考■□

この実験はメルデの実験と呼ばれたもので，音叉の方向を弦に対して平行にするか，垂直にするかで弦の振動数が変わるといったものである。なぜ変わるかについては，弦の振動方向と音叉の振動数が平行の場合は同じで，垂直の場合は異なっていることが原因になっている。下の図を見てみると，弦の振動と音叉の振動の関係が分かる。図ではともに，音叉が **1** 回だけ振動しているが，左の図では弦も **1** 回振動している。しかし，右の図では，弦は **0.5** 回しか振動していないため，振動数が半分となっている。



9

(1)　加速度の単位は[m/s^2]なので，LT^{-2}となる。

(2)　力の単位は[N]なので直接は求めることができない。運動方程式（$ma=f$）から，単位だけを見ると，[N]=[kg]×[m/s^2]となる。したがって，MLT^{-2}

(3)　線密度の次元は単位から考えるとML^{-1}となる。これと(2)の答えから，ρ^xS^y の次元は，

$M^xL^{-x}\times M^yL^yT^{-2y}=M^{x+y}L^{-x+y}T^{-2y}$

これが速さの次元LT^{-1}と等しくなることから，

Mについて，$x+y=0$

Lについて，$-x+y=1$

Tについて，$-2y=-1$

これを満たすのは，$x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$となる。

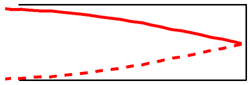
※これより，弦の振動を伝える速さは$\rho^{-\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{S}{\rho}}$ となることが分かる。

10

(1)　固定端反射なので定常波の<u>節</u>となる。

(2)　自由端反射なので定常波の<u>腹</u>となる。

(3)



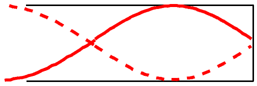
(4)　節から節までは半波長なので，節から腹までは **4** 分の **1** 波長となる。したがって，求める波長を λ_1 として，

$$\frac{\lambda_1}{4}=l+\Delta l \Leftrightarrow \lambda_1=4(l+\Delta l)$$

(5)　$(v=f\lambda)$ より，

$$f_1=\frac{V}{\lambda_1}=\frac{V}{4(l+\Delta l)}$$

(6)



(7)　求める波長を λ_3 として，

$$\frac{3\lambda_3}{4}=l+\Delta l \Leftrightarrow \lambda_3=\frac{4(l+\Delta l)}{3}$$

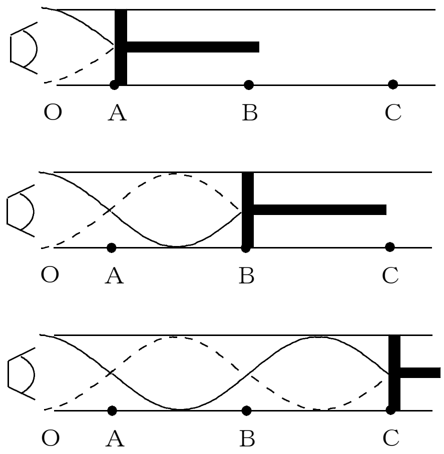
(8)　$(v=f\lambda)$ より，求める振動数を f_3 として，

$$f_3=\frac{V}{\lambda_3}=\frac{3V}{4(l+\Delta l)}=3\times f_1$$

11

(1)　ピストンがＡとＢの位置にあることから，図のような定常波が気柱内にできていることが分かる。ここでは，開口端補正の値が分かっていないので，ＡＢ間の長さが節から節までで半波長になっていることから求める。求める波長を λ として，

$$\frac{\lambda}{2}=55.5-17.5 \Leftrightarrow \lambda=76.0\,[\mathrm{cm}]$$



(2)　上の図より，ＯＡ間の距離と開口端補正 Δx を足したものが **4** 分の **1** 波長と等しいことが分かるので，

$$17.5+\Delta x=\frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \Delta x=1.5\,[\mathrm{cm}]$$

(3)　下の図より，ＯＢ間の距離に半波長を足したものがＯＣ間の距離になっていることが分かるので，

$$\mathrm{OC}=55.5+\frac{\lambda}{2}=93.5\,[\mathrm{cm}]$$

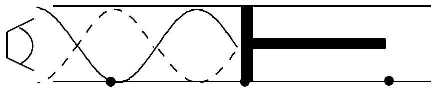
(4)　$(v=f\lambda)$ より，波長の単位に注意して，

$$450\times\frac{76}{100}=342\,[\mathrm{m/s}]$$

(5)　与式から考えて，

$$331+0.6t=342 \Leftrightarrow t=18.33\cdots \rightarrow 18.3\,[℃]$$

(6)　振動数を上げると何が変わるかを考察してみると，音速が一定なので，($v=f\lambda$) より，振動数を上げることで波長が短くなる。したがって，点Bの位置で共鳴するのは右図のような基本振動となる。したがって，波長は$\dfrac{3}{5}$倍になるので，振動数は$\dfrac{5}{3}$倍の **750**[Hz]となる。



□■物理的思考■□
　共鳴の問題は，どのような振動ができているかを一番に考える習慣をつけたい。そのためにも，気柱では開口端で自由端反射して定常波の腹，閉口端では固定端反射して節，弦では両端とも固定しているので固定端反射で節になることが作図の第一歩となる。
　さて，(1)の点Aはなぜ基本振動と判断できるのだろうか。ここでは，必ず ($v=f\lambda$) を用いて考えて欲しい。共鳴しているので振動数は **450**[Hz]で一定，そして，音速も一定なので，波長も一定となる。これより，(6)を除く上図のどの場合も波長が一定となっている。これより，点Aは最初の共鳴なので，基本振動となるだけである。

12

(1)　振動数の差がうなりの振動数となるので，音叉Bの振動数を f[Hz]として，
$|f-440|=5 \Leftrightarrow f=$**395，405**[Hz]

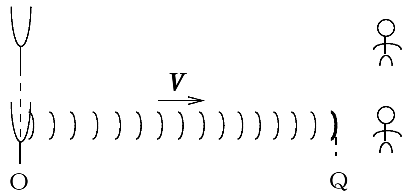
(2)　($v=\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$) より，$\sqrt{\dfrac{mg}{\rho}}$ [m/s]

(3)　弦の振動部分の長さを l とすると，基本振動が生じているので，波長 λ は，
$$\frac{\lambda}{2}=l \Leftrightarrow \lambda=2l$$
また，($v=f\lambda$) より，弦の振動数は，おもりDを弦に固定したときは$\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{mg}{\rho}}$，おもりEを弦に固定したときは，おもりEの質量を m'として，$\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{m'g}{\rho}}$ となる。問題文に音叉Cとのうなりの振動数が与えられているので，音叉Cの振動数を f'として，
$$\left|\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}-f'\right|=n,\ \left|\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{m'g}{\rho}}-f'\right|=n' \cdots ①$$
（※絶対値の外し方について考慮しないといけない。）
ここで，$n'<n$ より，おもりDより重いおもりEに変えた，つまり，$m'>m$ の時に，うなりの振動数が小さくなったと言える。弦の振動数は$\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{mg}{\rho}}$ なので，おもりを重くする（分子にある m を大きくする）ことで大きくなる。$\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{mg}{\rho}}>f'$ の場合，おもりを重くすることでうなりの振動数は大きくなり，問題文の条件に矛盾する。一方，$\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{mg}{\rho}}<f'$ の場合はおもりを重くすることでうなりの振動数は小さくなるので，この場合は問題文の条件に当てはまる。①式の絶対値を外すと，
$$f'-\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}=n,\ f'-\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{m'g}{\rho}}=n'$$
辺々を引くと，
$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{g}{\rho}}\left(\sqrt{m'}-\sqrt{m}\right)=n-n'$$

$$\Leftrightarrow m'=\left\{\sqrt{m}+2l\sqrt{\frac{\rho}{g}}(n-n')\right\}^2$$

13

(1)　振動数の定義から考えて，$\boldsymbol{1}$[s]間に f_0 回振動する，つまり，f_0 個の波を出すことになる。したがって，T[s]間では f_0T 個の波を発生する。



(2)　右図のように，点Oで出された音が T[s]後に点Qへ到達したとすると，音の進んだ距離がOQ間となることから，OQの長さが VT と求まる。また，この間に f_0T 個の波が含まれることから，波 $\boldsymbol{1}$ 個当たりの波の長さ，つまり，波長 λ は，

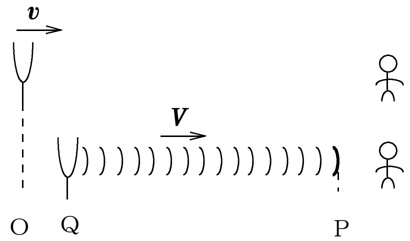
$\lambda=\dfrac{VT}{f_0T}=\dfrac{V}{f_0}$[m]

※この考えからも波の基本式（$v=f\lambda$）を導出できる。

(3)　音速について，速さと時間の積から，VT[m]と求まる。

(4)　音叉について，速さと時間の積から，vT[m]と求まる。

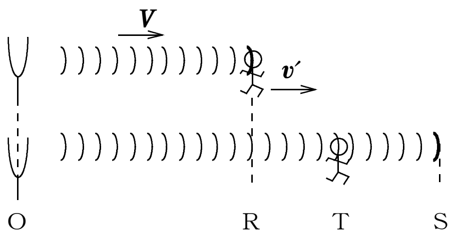
(5)　(1)と同様に考えると，f_0T 個の波を発生している。



(6)　右図のように，時刻 T[s]での音波の先頭を点P，音叉の位置を点Qとする。音叉が発生した f_0T 個の波は区間PQに含まれるので，波 $\boldsymbol{1}$ 個当たりの波の長さ，つまり，波長 λ'は，

$\lambda'=\dfrac{(V-v)T}{f_0T}=\dfrac{V-v}{f_0}$ …①

※音源が動いても音速に変化はないことに注意。音源が動くことで（追いかける，または，遠ざかる)，その分だけ波長が変化（短くなる，または，長くなる）することが，式からも図からも分かる



(7)　観測者が聞く振動数を f_1 とすると，（$v=f\lambda$）より，

$f_1=\dfrac{V}{\lambda'}=\dfrac{V}{V-v}f_0$

(8)　音速について，速さと時間の積から，VT[m]と求まる。

(9)　観測者について，速さと時間の積から，vT[m]と求まる。

(10)　右図のように，時刻 $t+T$[s]での音波の先頭を点S，観測者の位置を点Rとする。観測者が聞いた f_2T 個の波は区間STに含まれるので，音源が動いていないことから波長が λ のままであることに注意して，

ST=（　8　）−（　9　）$=f_2\lambda$

※観測者が聞いた音は観測者を通過している。このことから，観測者の聞いた音はST間に含まれることが分かる。また，(6)より，音源が動いていないときは波長は変わらないことも利用する。

(11)　(10)を計算すると，

$(V-v')t=\dfrac{V}{f_0}\times f_2t$ …②

$\Leftrightarrow f_2=\dfrac{V-v'}{V}f_0$

(12)　(6)と同様に考えて，音源が動いているので①式より波長が，

$\lambda'=\dfrac{\text{PQ}}{f_0t}=\dfrac{V-v}{f_0}$

となる。音源が動いていても音速は変わらないので，(10)と同様に観測者が聞く音はST間に含まれる。したがって，観測者が聞く振動数を f_3 とすると，観測者が聞いた波の個数は f_3T 個となることから，

ＳＴ＝（　８　）－（　９　）$=f_3\lambda'$

$\Leftrightarrow f_3=\dfrac{V-v'}{\lambda'}=\dfrac{V-v'}{V-v}f_0$

□■物理的思考■□

ドップラー効果の証明で大事なことは２つある。１つは，音速が変わるのは音源の動きに依らないことである。音速は空気中の振動が伝わる現象なので，音源の動きは関係ない。気温が変化したときや，空気に流れがあった（風が吹いた）場合にのみ音速が変化する。音源が動いても音速に変化が無いことに注意したい。

もう１つは，振動数の扱いである。振動数が f の時，単位時間当たりに f 個の波を発生する。これを同じ時間で聞けば，聞こえる音の振動数は f になるが，単位時間，つまり，1[s]より短い期間で同じ個数の波を聞けば，聞こえる音の振動数は f 以上となる。

14

【ポイント】

$$f'=\frac{V-v'}{V-v}f$$

f：音源の振動数、f'：観測者が聞く振動数，V：音速，v：音源の速さ
v'：観測者の速さ

①　音の進む方向を見極める（音源→観測者）。
②　音の進む方向と音源（観測者）が同じ方向に進むならその速さを音速から引き，反対なら音速に足す。
③　「人（観測者）が上」で覚える。

(1)　ドップラー効果の式（$f'=\dfrac{V-v'}{V-v}f$）より，自転車の速さを v，警笛の振動数を f とおくと，自転車の人が救急車から遠ざかっている時，音の進む方向と観測者の速度は同じ方向なので引いて，

$\dfrac{340-v}{340}\times f=660$…①

自転車の人が救急車に近づいている時，音の進む方向と観測者の速度は反対方向なので足して，

$\dfrac{340+v}{340}\times f=700$…②

①式と②式の辺々を足すと，

$2f=700+660\Leftrightarrow f=680$[Hz]

(2)　(1)で求めた答えを①式に代入して，

$340-v=\dfrac{660\times 340}{680}\Leftrightarrow v=10$[m/s]

15

(1)　ドップラー効果の式（$f'=\dfrac{V-v'}{V-v}f$）より，船の速さを v とおくと，音の進む方向と警笛の速度は同じ方向なので引いて，

$\dfrac{340}{340-v}\times 660=680\Leftrightarrow v=10$[m/s]

(2)　ドップラー効果の式（$f'=\dfrac{V-v'}{V-v}f$）より，音の進む方向と警笛および観測車の速度は同じ方向なのでともに引いて，

$\frac{340-10}{340-10}\times 660=660$［Hz］

16

(1)　波の基本式（$v=f\lambda$）から波長は$\lambda=\frac{v}{f}$と表せるが，音源が追いかけている分だけ，波長が短くなるので，

$\frac{340-20}{500}=6.4\times 10^{-1}$［m］

点Ｐで観測する振動数は，ドップラー効果の式（$f'=\frac{V-v'}{V-v}f$）より，音の進む方向と音源の速度は同じ方向なので引いて，

$\frac{340}{340-20}\times 500\rightarrow 5.31\times 10^{2}$［Hz］

(2)　(1)と同様に考えて，音源が逃げているいる分だけ，波長が長くなるので，

$\frac{340+20}{500}=7.2\times 10^{-1}$［m］

点Ｑで観測する振動数は，ドップラー効果の式（$f'=\frac{V-v'}{V-v}f$）より，音の進む方向と音源の速度は反対方向なので足して，

$\frac{340}{340+20}\times 500\rightarrow 4.72\times 10^{2}$［Hz］

17

(1)　観測者Ａが聞く振動数は，ドップラー効果の式（$f'=\frac{V-v'}{V-v}f$）より，音の進む方向と音源の速度は同じ方向なので引いて，

$\frac{V}{V-v}f$［Hz］

観測者Ｂが聞く振動数は，同様にして，音の進む方向と音源の速度は反対方向なので足して，

$\frac{V}{V+v}f$［Hz］

(2)　風が吹くと，音を伝える媒質（空気）に流れができるので，風と音の伝わる方向が同じ場合は音速が風の速さの分だけ速く，反対なら遅くなる。したがって，観測者Ａと観測者Ｂに伝わる音速はそれぞれ，$V+w$，$V-w$ となるので，ドップラー効果の式（$f'=\frac{V-v'}{V-v}f$）より，

観測者Ａ：$\frac{V+w}{V+w-v}f$［Hz］

観測者Ｂ：$\frac{V-w}{V-w+v}f$［Hz］

18

(1)　波の基本式（$v=f\lambda$）から波長は$\lambda=\frac{v}{f}$と表せるが，音源 S_1 が逃げている分だけ，波長が長くなるので，

音源 S_1 からの波長は$\frac{V+v}{f}$［m］となる。また，音源 S_2 が追いかけている分だけ，波長が短くなるので，

音源 S_2 からの波長は$\frac{V-v}{f}$［m］となる。

(2)　観測者Ａが聞く振動数は，ドップラー効果の式（$f'=\frac{V-v'}{V-v}f$）より，音源 S_1 からの音の進む方向と音

源 S_1 の速度は反対方向なので足して，$\dfrac{V}{V+v}f$ [Hz] となり，同様にして，音源 S_2 の音の進む方向と音源 S_2 の速度は同じ方向なので引いて，$\dfrac{V}{V-v}f$ [Hz] となる。うなりの振動数は，振動数の差なので，

$$\left|\frac{V}{V-v}f-\frac{V}{V+v}f\right|=\frac{2vVf}{V^2-v^2}\ [\text{Hz}]$$

これが 1 [s] 間に聞くうなりの回数となっている。

19

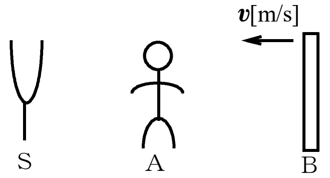
(1)　汽車が点Ａを通過したときに出した音は点Ａから点Ｏに向かって進んで行く。汽車のＡＯ方向の成分は $v\cos\theta$ なので，ドップラー効果の式（$f'=\dfrac{V-v'}{V-v}f$）より，音の進む方向と音源の速度は同じ方向なので引いて，

$$\frac{V}{V-v\cos\theta}f\ [\text{Hz}]$$

20

(1)　反射板Ｂ上の観測者が聞く振動数は，ドップラー効果の式（$f'=\dfrac{V-v'}{V-v}f$）より，音源からの音の進む方向と観測者の速度は反対方向なので足して，

$$\frac{V+v}{V}f$$



(2)　(1) で求めた振動数の音を壁が反射して，観測者Ａが聞くと考える。観測者Ａが聞く反射音の振動数は，ドップラー効果の式（$f'=\dfrac{V-v'}{V-v}f$）より，音が伝わる方向と音源（この場合は壁）が進む方向は同じなので引いて，

$$\frac{V}{V-v}\left(\frac{V+v}{V}f\right)=\frac{V+v}{V-v}f$$

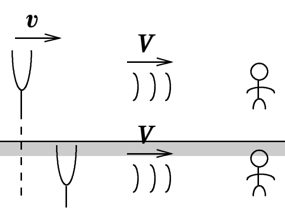
(3)　観測者Ａが聞く音源Ｓの直接音の振動数は，音源，観測者ともに静止しているので，観測者が聞く振動数は f で変わらない。ここで求めた直接音と (2) で求めた反射音を観測者が同時に聞くのでうなりが生じる。うなりの振動数は振動数の差から求められるので，

$$\left|\frac{V+v}{V-v}f-f\right|=\frac{2v}{V-v}f=n$$

$$\Leftrightarrow v(2f+n)=nV$$

$$\Leftrightarrow v=\frac{nV}{2f+n}$$

【反射音の求め方】
① 反射音が聞く音を求める。
② ①で求めた音を反射体が出していると考え，この音を観測者が聞くものとして求める。
※反射体は①では観測者になり，②では音源になっていることに注意する。



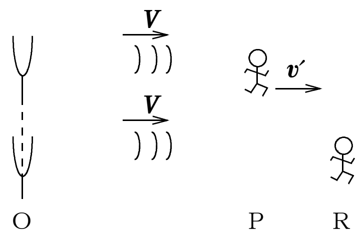
21

(1)　時刻 $\boldsymbol{0}$[s]での音叉の位置を点O，観測者の位置を点P，そして，時刻 $\boldsymbol{t}$[s]での音叉の位置を点Qとする。時刻 $\boldsymbol{0}$[s]に出した音は，観測者までの距離が $\boldsymbol{L}$[m]なので，距離を速さで割ることから，$\dfrac{L}{V}$[s]後に観測者に届く。

(2)　音叉は速さ $\boldsymbol{v}$[m/s]で進んでいるので，速さと時間の積からOQ間の距離が $\boldsymbol{vt}$[m]と求まる。したがって，時刻 $\boldsymbol{t}$[s]に出した音は，観測者までの距離が $\boldsymbol{L-vt}$[m]なので，距離を速さで割ることから，$\dfrac{L-vt}{V}$[s]後に観測者に届くので，到達する時刻は$t+\dfrac{L-vt}{V}$[s]となる。

(3)　音叉が出した音の個数は振動数からf_0t個で，(1)と(2)より，これを$t+\dfrac{L-vt}{V}-\dfrac{L}{V}=\dfrac{(V-v)t}{V}$の時間で聞いていることになる。したがって，観測者が聞く音の振動数は，観測者が単位時間当たりに聞く音の個数に等しいことから，

$$\frac{f_0t}{\frac{(V-v)t}{V}}=\frac{V}{V-v}f_0\text{[Hz]}$$



(4)　時刻 $\boldsymbol{t}$[s]での観測者の位置を点Rとする。時刻 $\boldsymbol{0}$[s]に出した音は，観測者までの距離が $\boldsymbol{L}$[m]なので，距離を速さ（相対速度）で割ることから，$\dfrac{L}{V-v'}$[s]後に観測者に届く。

(5)　観測者は速さ $\boldsymbol{v'}$[m/s]で進んでいるので，速さと時間の積からPR間の距離が $\boldsymbol{v't}$[m]と求まる。したがって，時刻 $\boldsymbol{t}$[s]に出した音は，観測者までの距離が $\boldsymbol{L+v't}$[m]なので，距離を速さ（相対速度）で割ることから，$\dfrac{L+v't}{V-v'}$[s]後に観測者に届くので，到達する時刻は$t+\dfrac{L+v't}{V-v'}$[s]となる。

(6)　音叉が出した音の個数は振動数からf_0t個で，(4)と(5)より，これを$t+\dfrac{L+v't}{V-v'}-\dfrac{L}{V-v'}=\dfrac{Vt}{V-v'}$の時間で聞いていることになる。したがって，観測者が聞く音の振動数は，観測者が単位時間当たりに聞く音の個数に等しいことから，

$$\frac{f_0t}{\frac{Vt}{V-v'}}=\frac{V-v'}{V}f_0\ \text{[Hz]}$$

(7)　時刻 $\boldsymbol{0}$[s]に出した音は，観測者までの距離が $\boldsymbol{L}$[m]なので，距離を速さ（相対速度）で割ることから，$\dfrac{L}{V-v'}$[s]後に観測者に届く。

(8)　時刻 $\boldsymbol{t}$[s]に出した音は，観測者までの距離が $\boldsymbol{L+v't-vt}$[m]なので，距離を速さ（相対速度）で割ることから，$\dfrac{L+v't-vt}{V-v'}$[s]後に観測者に届くので，到達する時刻は$t+\dfrac{L+v't-vt}{V-v'}$[s]となる。

(9)　音叉が出した音の個数は振動数からf_0t個で，(7)と(8)より，これを$t+\dfrac{L+v't-vt}{V-v'}-\dfrac{L}{V-v'}=\dfrac{(V-v)t}{V-v'}$の時間で聞いていることになる。したがって，観測者が聞く音の振動数は，観測者が単位時間当たりに聞く音の個数に等しいことから，

$$\frac{f_0t}{\frac{(V-v)t}{V-v'}}=\frac{V-v'}{V-v}f_0\text{[Hz]}$$

22

(1)　警笛が出した音の個数は振動数からft個となる。

(2)　最初に出した音は，船までの距離が $2L$[m]とすると，距離を速さ（相対速度）で割ることから，$\dfrac{2L}{V+v}$ [s]後に船に届く。警笛を鳴らし始めてから t[s]後には船が vt[m]進んでいるので，船までの距離が $2(L-vt)$[m]なので，距離を速さ（相対速度）で割ることから，$\dfrac{2(L-vt)}{V+v}$[s]後に船に届く。つまり，最初に音を出してから，$t+\dfrac{2(L-vt)}{V+v}$[s]後に船に届く。したがって，船が音を聞いていた時間は，

$$t+\frac{2(L-vt)}{V+v}-\frac{2L}{V+v}=\frac{V-v}{V+v}t\ [\mathrm{s}]$$

(3)　観測者が聞く音の振動数は，観測者が単位時間当たりに聞く音の個数に等しいことから，

$$\frac{f_0t}{\dfrac{(V-v)t}{V+v'}}=\frac{V+v'}{V-v}f_0\ [\mathrm{Hz}]$$

23

(1)　距離を速さで割ることから，$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{V}$[s]となる。

(2)　ＡＢ方向に vt[m]進んでいるので，３平方の定理から，このときの汽車と観測者の距離は $\sqrt{b^2+(a-vt)^2}$ となっている。距離を速さで割ることから，$\dfrac{\sqrt{b^2+(a-vt)^2}}{V}$[s]となる。したがって，時刻は$t+\dfrac{\sqrt{b^2+(a-vt)^2}}{V}$[s]となる。

(3)　(2)を式変形すると，

$$t+\frac{\sqrt{a^2+b^2-2avt}}{V}$$

となる。ただし，t は非常に小さいので，２乗の項は無視した。これをさらに式変形すると，

$$t+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{V}\left(1-\frac{2avt}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

問題文に与えられている式（$(1+x)^n=1+nx$）を用いて変形して，

$$t+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{V}\left(1-\frac{avt}{a^2+b^2}\right)$$

よって，観測者が汽笛を聞いていた時間は，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AO}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より，

$$t+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{V}\left(1-\frac{avt}{a^2+b^2}\right)-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{V}=t-\frac{v}{V}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}t=t-\frac{v}{V}\cos\theta\ t=\frac{V-v\cos\theta}{V}t$$

(4)　音叉が出した音の個数は振動数からft個で，(2)で求めた時間で聞いているので，

$$\frac{ft}{\dfrac{(V-v\cos\theta\,)t}{V'}}=\frac{V}{V-v\cos\theta}f\ [\mathrm{Hz}]$$