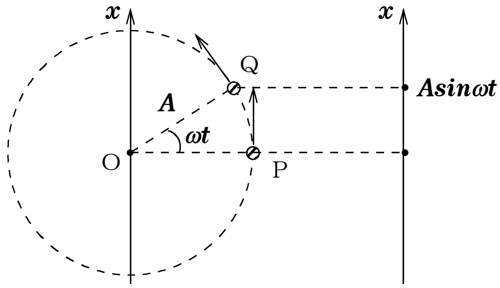
物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.11
単振動編
ブツリヨキワメヨ

1



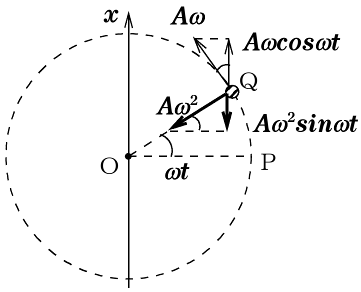
(1)　角速度は単位時間当たりに回転する角度なので，t[s]間では ωt[rad]となる。

(2)　図より，$x=A\sin\omega t$[m]となる。

(3)　接線方向

(4)　（$v=r\omega$）より，$A\omega$[m/s]となる。

(5)　速度を x 軸方向と x 軸方向に垂直な方向に分解すると，x 成分は$A\omega\cos\omega t$[m/s]となる。



(6)　円の中心向き（法線方向）

(7)　（$v=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）より，$A\omega^2$[m/s^2]となる。

(8)　加速度を x 軸方向と x 軸方向に垂直な方向に分解すると，x 成分は$-A\omega^2\sin\omega t$[m/s^2]となる。

(9)　(2)と(8)の結果より，加速度の x 成分は$-\omega^2 x$と表せる。

(10)　運動方程式（$ma-=f$）より，単振動に必要な力は$-m\omega^2 x$[N]となる。

(11)　復元力

(12)　（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，$\dfrac{2\pi}{\omega}$[s]となる。

2

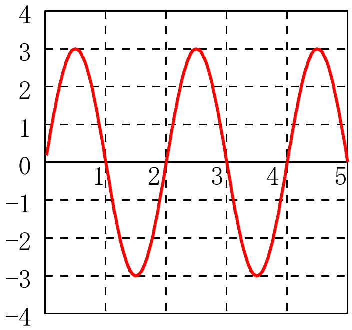
(1)　単振動の位置を表す式は$x=A\sin\omega t$で表せるので，$A=3.0$，$\omega=\pi\rightarrow3.1$と分かる。よって，角振動数は$\omega=3.1$[rad/s]である。

(2)　(1)より，$A=3.0$[m]となる。

(3)　（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，$T=2.0$[s]となる。

(4)　周期と振動数が逆数の関係にあることから，$f=\dfrac{1}{2.0}=0.50$[Hz]となる。

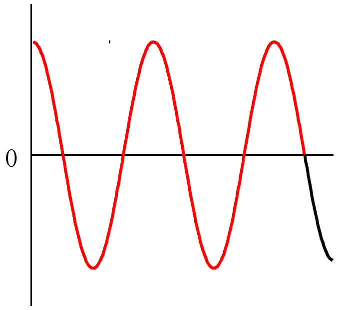
(5)



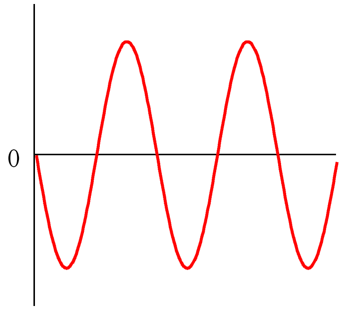
(6)　単振動の速度を表す式は$v=A\omega\cos\omega t$ で表せるので，
$v=3\pi\cos\pi t$

(7)　単振動の加速度を表す式は$a=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 x$で表されるので，
$a=-3\pi^2\sin\pi t$

(6) のグラフ



(7) のグラフ

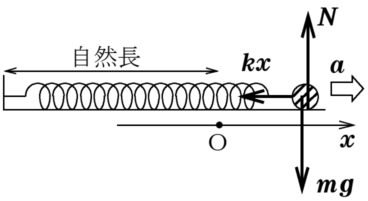


□■物理的思考■□
　(5)～(7) のグラフを比較することで，単振動の中心と端について次のようなことが分かる。
（中心）速さが最大，加速度 0（⇔力のつり合い）
（端）　速さ 0，加速度最大

3

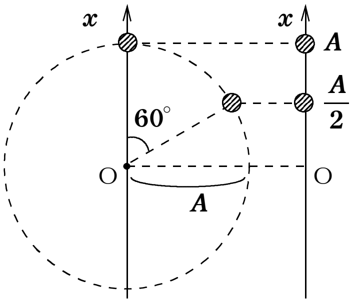
(1)　手がした仕事は弾性エネルギーと変わるので，
$\frac{1}{2}kA^2$

(2)　運動方程式（$ma=f$）より，
$ma=-kx$



(3)　(2) 式を整理すると，
$a=-\frac{k}{m}x$
単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，
$\omega^2=\frac{k}{m}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$
周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，
$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(4)　単振動の端から端まで移動するのにかかる時間は半周期なので，
$\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



(5)　円運動で考えると，$\frac{\pi}{3}$ [rad]（60[°]）回転したときなので，つまり，6 分の 1 周期となることから，
$\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$

(6)　力学的エネルギー保存則（K+U=一定）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+\frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow v=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

（別解）

単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$ で与えられ，速度が最大となる場所は単振動の中心で，速さは Aw と分かる。

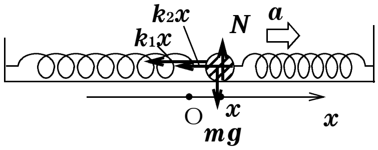
これを用いると，$A\sqrt{\frac{k}{m}}$ とすぐに計算できる。

□■物理的思考■□
　単振動の位置，速度，および，加速度が円運動から導出したことから分かるように，単振動のルーツは円運動にある。単振動の位置と時刻の相関関係は(5)の図から分かる。つまり，(4)は円運動で考えると 180° 回転したとき，(5)は 60° 回転したときだと分かる。この回転角度と 360° （1回転の周期）の比から時刻を計算できる。

4

(1)　運動方程式（$ma=f$）より，

$ma=-(k_1+k_2)x$



(2)　(1)式を整理すると，

$$a=-\frac{k_1+k_2}{k}x$$

単振動の加速度が$a=-\omega^2x$と表せることから，

$$\omega^2=\frac{k_1+k_2}{m} \Leftrightarrow \omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

(3)　力学的エネルギー保存則（K+U=一定）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+\frac{1}{2}k_1A^2+\frac{1}{2}k_2A^2 \Leftrightarrow v=A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

（別解）

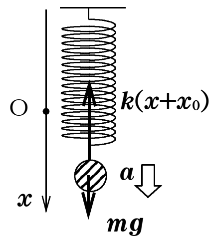
単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$ で与えられ，速度が最大となる場所は単振動の中心で，速さは Aw と分かる。

これを用いると，$A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ とすぐに計算できる。

(4)　単振動の端から中心まで移動するのにかかる時間は 4 分の 1 周期となるので，

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

5



(1)　原点でのばねの伸びを x_0 とすると，原点での物体に働く力のつり合いより．

$kx_0=mg$…①

運動方程式（$ma=f$）より，

$ma=mg-k(x+x_0)$

①式を用いて式変形すると，

$ma=-kx$

(2)　(1)で求めた式を整理すると，

$$a=-\frac{k}{m}x$$

単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，

$$\omega^2=\frac{k}{m}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

周期の式（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3)　振動中心は加速度が 0，つまり，力のつり合いの点なので，原点となる。

(4)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(mgA+\frac{1}{2}kx_0{}^2\right)=0+\left(0+\frac{1}{2}k(A+x_0)^2\right)\Leftrightarrow v=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

（別解）

単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$ で与えられ，速度が最大となる場所は単振動の中心で，速さは Aw と分かる。

これを用いると，$A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とすぐに計算できる。

(5)　単振動の端から端まで移動するのにかかる時間は半周期なので，

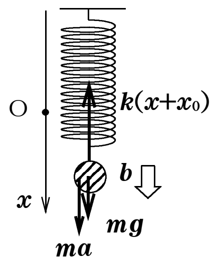
$$\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(6)　ばねの伸びが $x+x_0$ になるので，弾性力は①式を用いて，

$$k(x+x_0)=kx+mg$$

エレベーター内の観測者から見た慣性力は，エレベーターの加速度とは反対向きに，

ma



(7)　運動方程式（$ma=f$）より，

$$mb=mg+ma-k(x+x_0)$$

①式を用いて式変形すると，

$$mb=-kx+ma=-k\left(x-\frac{ma}{k}\right)\cdots②$$

(8)　振動中心は加速度が 0 となるところなので②式より，

$$\frac{ma}{k}$$

(9)　振動中心が x_1 の場合，単振動の加速度が$a=-\omega^2(x-x_1)$と表せることから，②式より，

$$\omega^2=\frac{k}{m}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

周期の式（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

6

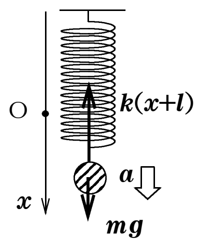
(1)　物体に働く力のつり合いより．

$$kl=mg\Leftrightarrow k=\frac{mg}{l}\cdots①$$

(2)　運動方程式（$ma=f$）より，

$$ma=mg-k(x+l)$$

①式を用いて式変形すると，



$ma=-kx=-\frac{mg}{l}x$

(3)　(2)で求めた式を整理すると，

$a=-\frac{g}{l}x$

単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，

$\omega^2=\frac{g}{l}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(4)　振動中心は加速度が 0（力のつりあい）となるところなので(2)で求めた式より，原点と分かる。

(5)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$\frac{1}{2}mv^2+(0+\frac{1}{2}kl^2)=0+(mgl+0)\Leftrightarrow v=l\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{gl}$

（別解）

単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$ で与えられ，速度が最大となる場所は単振動の中心で，速さは Aw と分かる。

これを用いると，$l\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{gl}$ とすぐに計算できる。

(6)　単振動の端から端まで移動するのにかかる時間は半周期なので，

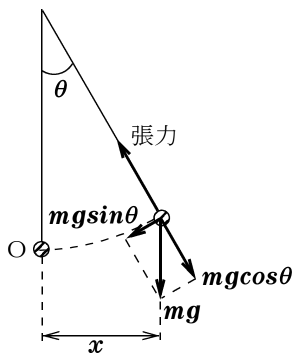
$\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

□■物理的思考■□
　振幅の求め方はいたって簡単である。振動の中心と端を調べ，その差が振幅となることから調べればよい。振動中心は力のつり合い，振動の端は速さが 0 となることから調べることができる。

7

(1)　図のように力を，円軌道の接線方向とそれに垂直な方向に分解すると，重力の接線成分は，

$mg\sin\theta$



(2)　図中の直角三角形に注目して，

$\sin\theta=\frac{x}{l}$

(3)　θ が非常に小さい時は，水平方向に働く力が(1)で求めた円軌道の接線方向に働く力と等しいと考えることができるので，

$mg\sin\theta=\frac{mg}{l}x$

(4)　水平右向きの加速度を a として，運動方程式（$ma=f$）より，

$ma=-\frac{mg}{l}x\Leftrightarrow a=-\frac{g}{l}x$

単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，

$\omega^2=\frac{g}{l}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

(5)　周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

8

ここでは，5 ～ 7 の問題で求めたばね振り子の周期の式（$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ …①）とふりこの周期の式（$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ …②）を用いて計算する。

(1)　ばねの長さが半分になるとばね定数（k）が 2 倍になるので，①式より，周期は $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 倍となる。

糸の長さ（l）が半分になるので，②式より，周期は $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 倍となる。

(2)　おもりの質量（m）が 2 倍になるので，②式より，周期は $\sqrt{2}$ 倍となる。
おもりの質量（m）を変えても①式に影響はないので，周期は 1 倍となる。

(3)　振幅（A）を変えても①式に影響はないので，周期は 1 倍となる。
振幅（A）を変えても②式に影響はないので，周期は 1 倍となる。

(4)　慣性力 ma を鉛直下向きに受けるので，見かけの重力加速度が $g+a$ に変わる。
重力加速度（g）を変えても①式に影響はないので，周期は 1 倍となる。
重力加速度（g）が $\dfrac{g+a}{g}$ 倍となるので，②式より周期は $\sqrt{\dfrac{g}{g+a}}$ 倍となる。

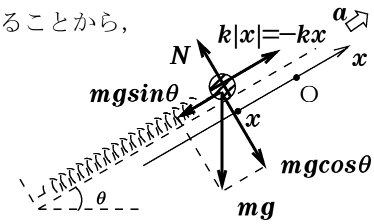
(5)　慣性力 ma を水平方向に受けるので，見かけの重力加速度が $\sqrt{g^2+a^2}$ に変わる。
重力加速度（g）を変えても①式に影響はないので，周期は 1 倍となる。
重力加速度（g）が $\dfrac{\sqrt{g^2+a^2}}{g}$ 倍となるので，②式より周期は $\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}}$ 倍となる。

9

(1)　運動方程式（$ma=f$）より，

$ma=-mg\sin\theta-kx=-k(x+\dfrac{mg\sin\theta}{k})$

(2)　振動中心が x_0 の場合，単振動の加速度が $a=-\omega^2(x-x_0)$ と表せることから，



$\omega^2=\dfrac{k}{m} \Leftrightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

周期の式（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(3)　単振動の端から端まで移動するのにかかる時間は半周期なので，

$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

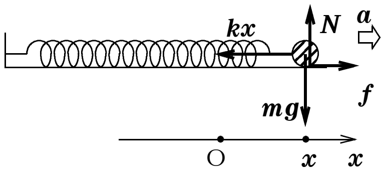
(4)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$\dfrac{1}{2}mv^2+(0+\dfrac{1}{2}kl^2)=0+(mgl\sin\theta+0) \Leftrightarrow v=\sqrt{2gl\sin\theta-\dfrac{kl^2}{m}}$

※単振動の速さが Aw と与えられるのでは振動の中心だけであることに注意したい。これまで（別解）として用いた解法はできない。

10

(1)　運動方程式（$ma=f$）より，



$$ma=-kx+\mu' mg=-k(x-\frac{\mu' mg}{k})$$

これより，振動中心（$a=0$）の x 座標は，

$$\frac{\mu' mg}{k}$$

また，振動の端（速さ 0）の x 座標は A となるので，振幅は，

$$A-\frac{\mu' mg}{k}$$

これより，折り返す位置，つまり，振動の端は，

$$A-2(A-\frac{\mu' mg}{k})=\frac{2\mu' mg}{k}-A$$

(2)　振動中心で速さが最大となるので，その位置は，(1) より，

$$\frac{\mu' mg}{k}$$

また，このときの速さは，力学的エネルギーの変化が保存力以外の力がする仕事に等しいことから，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(\frac{\mu' mg}{k})^2-\left\{0+\frac{1}{2}kA^2\right\}=-\mu' mg(A-\frac{\mu' mg}{k})$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(A-\frac{\mu' mg}{k})(A+\frac{\mu' mg}{k})-\mu' mg(A-\frac{\mu' mg}{k})=\frac{1}{2}(A-\frac{\mu' mg}{k})(kA-\mu' mg)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(A-\frac{\mu' mg}{k})^2$$

$$\Leftrightarrow v=(A-\frac{\mu' mg}{k})\sqrt{\frac{k}{m}}$$

（別解）

単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$ で与えられ，速度が最大となる場所は単振動の中心で，速さは Aw と分かる。

これを用いると，$\Leftrightarrow v=(A-\frac{\mu' mg}{k})\sqrt{\frac{k}{m}}$ とすぐに計算できる。

(3)　(1) の位置での力のつり合いを考えると，摩擦力 f は弾性力と等しくなるので，

$$f=k\left|\frac{2\mu' mg}{k}-A\right|=|2\mu' mg-kA|$$

摩擦力が最大摩擦力（μN）を越えると滑り出すので，

$\frac{2\mu' mg}{k}-A\leqq 0$のとき，絶対値を外して計算すると，

$$kA-2\mu' mg>\mu mg\Leftrightarrow A>\frac{(2\mu'+\mu)mg}{k}\ \cdots①$$

$\frac{2\mu' mg}{k}-A>0$ のとき，同様にして計算すると，

$$2\mu' mg-kA>\mu mg\Leftrightarrow A<\frac{(2\mu'-\mu)mg}{k}\ \cdots②$$

物体を離す位置を振動中心より大きくしないと単振動しないことから考えて，

$$A>\frac{\mu' mg}{k}$$

これと②式より，

$$\frac{\mu' mg}{k}<A<\frac{(2\mu'-\mu)mg}{k}\ \cdots③$$

となるが，右辺について，一般に静止摩擦係数より動摩擦係数の方が小さいので，

$$2\mu'-\mu=\mu'+\mu'-\mu<\mu'$$

となることから，③式を満たす A は存在しない。これより，物体が折り返すための条件は，

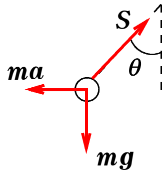
$A > \frac{(2\mu' + \mu)mg}{k}$

（別解）

②式が成立しないことを説明しているが，物体が折り返すことを考えると，折り返す位置でばねが縮まないといけない。この条件が $\frac{2\mu' mg}{k} - A \leqq 0$ であるので，これを用いて解答しても構わない。（ここでは，摩擦力は向きが限定されないことが多く，絶対値をつけて考える習慣をつけて欲しいため，このような解答の形を取った。）

11

(1)　電車内の人から見ると，電車の加速度と反対向きに大きさ ma の慣性力が働いていることに注意して，右図のように作図する。



(2)　重力と慣性力の合力は，三平方の定理より，

$\sqrt{(mg)^2+(ma)^2} = m\sqrt{g^2+a^2}$

これが張力と等しくなるので，張力の大きさは，

$m\sqrt{g^2+a^2}$

（別解）

張力の大きさを S として，力のつり合いの式を立てると，

水平方向：$S\cos\theta = mg$

鉛直方向：$S\sin\theta = ma$

数学公式（$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$）より，

$(\frac{ma}{S})^2 + (\frac{mg}{S})^2 = 1 \Leftrightarrow S = m\sqrt{g^2+a^2}$

(3)　張力の大きさから考えて，見かけの重力加速度が $g \to \sqrt{g^2+a^2}$ となっているので，振り子の公式（$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$）から，

$2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

12

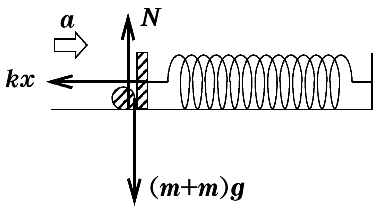
(1)　衝突後の物体と台の速さを v_1 として，運動量保存則より，

$mv + M(0) = (m+M)v_1 \Leftrightarrow v_1 = \frac{mv}{m+M}$

(2)　ばねの縮みの最大値を r として，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$\frac{1}{2}(m+M)(\frac{mv}{m+M})^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kr^2 \Leftrightarrow r = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$

(3)　運動方程式（$ma=f$）より，



$(m+M)a = -kx \Leftrightarrow a = -\frac{k}{m+M}x$

単振動の加速度が $a = -\omega^2 x$ と表せることから，

$\omega^2 = \frac{k}{m+M} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

周期の式（$T = \frac{2\pi}{\omega}$）より，

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$

ばねが自然長の時に物体が台から離れる，つまり，半周期後に離れることから，

$\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$

※台と物体とそれぞれについて運動方程式（$ma=f$）を立てると，

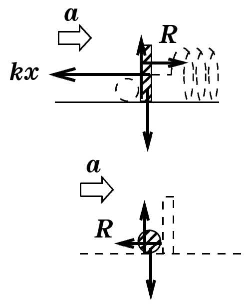
台：$Ma=R-kx$

物体：$ma=-R$

２式より，

$R=\dfrac{kx}{m+M}$

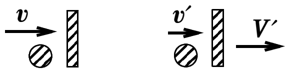
これより，物体と板が離れるのは $R=0$ の時なのでばねが自然長のときと分かる。



(4)　衝突後の物体の速さを v'，台の速さを V'とすると，運動量保存則より，

$mv+M(0)=mv'+MV'$…①

はねかえりの式（$e=\dfrac{\text{衝突後に遠ざかる速さ}}{\text{衝突前に近づく速さ}}$）より，



$e=\dfrac{V'-v'}{v}\Leftrightarrow ev=V'-v'$…②

①－②× M を計算して，

$v'=\dfrac{(m-eM)v}{m+M}$（物体の速さ）

①＋②× m を計算して，

$V'=\dfrac{(1+e)mv}{m+M}$（台の速さ）

(5)　ばねの縮みの最大値を r'として，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$\dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{(1+e)mv}{m+M}\right)^2+0=0+\dfrac{1}{2}kr'^2\Leftrightarrow r'=\dfrac{(1+e)mv}{m+M}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

(6)　単振動の周期は(3)と比べると，$m+M\to M$となっているだけなので，

$2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

ばねが自然長から最大に縮むまでは 4 分の 1 周期で，この間に物体が r'進むことから，

$\dfrac{(m-eM)v}{m+M}\times\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}=r'=\dfrac{(1+e)mv}{m+M}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

$\Leftrightarrow(2m+\pi M)e=(\pi-2)m$

$\Leftrightarrow e=\dfrac{(\pi-2)m}{2m+\pi M}$

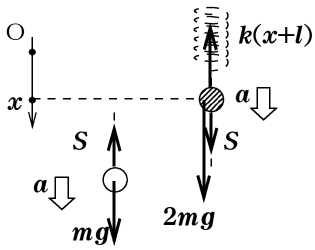
(7)　(5)で求めた物体の速さが 0 になることから，

$m-eM=0\Leftrightarrow e=\dfrac{m}{M}$

(8)　ばねが自然長で，つまり，半周期後に再び衝突するので，

$\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

13



(1)　つり合いの位置でのばねの伸びを l とすると，力のつり合いより，

$kl=3mg$…①

つりあいの位置から鉛直下向き方向の変位を x，同じ位置での張力の大きさを S とすると，運動方程式（$ma=f$）より，

$2ma=2mg+S-k(x+l)$…②

$ma=mg-S$…③

①式～③式より，

$$3ma=-kx \Leftrightarrow a=-\frac{k}{3m}x \cdots ④$$

単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，

$$\omega^2=\frac{k}{3m} \Leftrightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

周期の式（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，

$$2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}\ [\mathrm{s}]$$

また，単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$で与えられ，速度の最大値は Aw と分かる。振動中心がつりあいの位置で，速さ 0 の点から振動の端が変位が d のときと分かるので，振幅が d となる。これより，速さの最大値は，

$$d\sqrt{\frac{k}{3m}}\ [\mathrm{m/s}]$$

（別解）

力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，原点を位置エネルギーの基準点とすると，変位 x での運動エネルギー K は，

$$K+\frac{1}{2}k(x+l)^2-3mgx=0+\frac{1}{2}k(l+d)^2-3mgd$$

$$\Leftrightarrow K=-\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kd^2 \ (\because ①式)$$

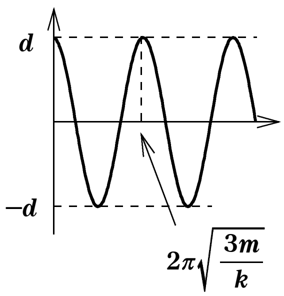
この式より，$x=0$ で運動エネルギーが最大，つまり，速さが最大となる。この速さを V とすると，

$$\frac{1}{2}3mV^2=\frac{1}{2}kd^2 \Leftrightarrow V=d\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

※今回は速さが最大となる点が分からないという視点で解いたが，振動中心で速さが最大になることが分かっていれば，振動中心と $x=d$ の２点について力学的エネルギー保存則を立てればよい。

(2)　振幅 d の単振動で，時刻 0 での位置に注意すると，右図のようになる。これを式で表すと，

$$x=d\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\,t\right)$$



(3)　③式に④式を代入して，

$$S=mg+\frac{1}{3}kx$$

(4)　力のつり合い位置なので，$x=0$ となる。

(5)　糸がたるむ位置は張力が 0 になることから，(3)で求めた式より，

$$mg+\frac{1}{3}kx=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3mg}{k} \cdots ⑤$$

また，振幅から考えて，単振動の最高点は$-d$ となる。これが⑤の値を越えると（x 座標が下向きなので，座標で考えると⑤の値より小さくなると）糸がたるんでしまう。したがって，２つのおもりが単振動できる d の最大値は，

$$-d=-\frac{3mg}{k} \Leftrightarrow d=\frac{3mg}{k}$$

14

(1)　浮力が押しのけられた液体の重力に等しいことに注意して，直方体に働く力のつり合いより，

$$\rho_0 Shg=\rho Slg \iff l=\frac{\rho_0}{\rho}h$$

(2)　$\rho S(l+x)g-\rho_0 Shg=-\rho Sgx$

(3)　単振動の中心は力のつり合い（加速度 0）の点であることから $x=0$ となる。

(4)　(2)で求めた力が復元力になっていることから単振動することが分かる。運動方程式（$ma=f$）より，

$$\rho_0 Sha=-\rho Sgx \iff a=-\frac{\rho g}{\rho_0 h}x$$

　単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，

$$\omega^2=\frac{\rho g}{\rho_0 h} \Leftrightarrow \omega=\sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}$$

(5)　周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，$2\pi\sqrt{\frac{\rho_0 h}{\rho g}}$ となる。振動の端（速さ 0 の点）から振動中心までなので，かかる時間は 4 分の 1 周期，つまり，$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho_0 h}{\rho g}}$ となる。

(6)　単振動の速度は$v=A\omega\cos\omega t$ で与えられ，速度の最大値は Aw と分かる。振動中心がつりあいの位置で，速さ 0 の点から振動の端が変位が d のときと分かるので，振幅が d となる。これより，速さの最大値は $d\sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}$ となる。

（別解１）

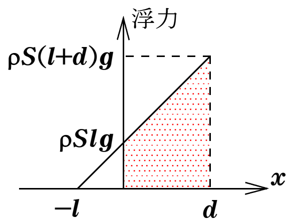
　運動方程式の形（$\rho_0 Sha=-\rho Sgx$）から考えると，水平ばね振り子の運動方程式（$ma=-kx$）と同じ形になっていることが分かる。水平ばね振り子と同様に力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）が成立していると考えると，

$$\frac{1}{2}\rho Sgd^2=\frac{1}{2}\rho_0 Shv^2 \iff v=d\sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}$$

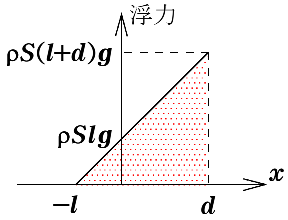
（別解２）

　運動エネルギーの変化がされた仕事に等しい（エネルギーの原理）から考える。重力のした仕事は運動方向に注意すると$-\rho_0 Shdg$ となり，浮力がした仕事は（$f-x$）図のフラフの面積から求めることができ，$\frac{1}{2}\rho S(d+2l)dg$ となる。したがって，求める速さを v とすると，

$$\frac{1}{2}\rho_0 Shv^2-0=-\rho_0 Shdg+\frac{1}{2}\rho S(d+2l)dg \iff v=d\sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}$$



(7)　運動エネルギーの変化がされた仕事に等しい（エネルギーの原理）から考える。重力のした仕事は運動方向に注意すると$-\rho_0 Sh(l+d)g$ となり，浮力がした仕事は（$f-x$）図のフラフの面積から求めることができ，$\frac{1}{2}\rho S(d+l)^2 g$ となる。したがって，求める速さを v とすると，



$$\frac{1}{2}\rho_0 Shv^2-0=-\rho_0 Sh(l+d)g+\frac{1}{2}\rho S(d+l)^2 g$$

となる。(1) で得られた式を変形すると，

$$\frac{1}{2}\rho_0 Shv^2-0=\frac{1}{2}\rho S g(d^2-l^2) \Leftrightarrow v=\sqrt{\frac{\rho g(d^2-l^2)}{\rho_0 h}}$$

（別解）

運動方程式の形（$\rho_0 Sha=-\rho Sgx$）から考えると，水平ばね振り子の運動方程式（$ma=-kx$）と同じ形になっていることが分かる。水平ばね振り子と同様に力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）が成立していると考えると，

$$\frac{1}{2}\rho Sgd^2=\frac{1}{2}\rho_0 Shv^2+\frac{1}{2}\rho Sgl^2 \Leftrightarrow v=d\sqrt{\frac{\rho g(d^2-l^2)}{\rho_0 h}}$$

(8)　液面から完全に出た後，物体に働く力は重力だけなので重力加速度 g の等加速度運動を行う。（$v^2-v_0{}^2=2aS$）より，

$$0-v^2=2(-g)H \Leftrightarrow H=\frac{v^2}{2g}=\frac{\rho(d^2-l^2)}{2\rho_0 h}$$