物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.28
交流編
ブツリヨキワメヨ

1

(1) $\frac{\pi}{2}$　(2) $-\frac{\pi}{2}$　(3) π

2

(1) $\sqrt{A^2+B^2}$, $\tan\alpha=\frac{B}{A}$　(2) $\sqrt{A^2+B^2}$, $\tan\alpha=\frac{B}{A}$

3

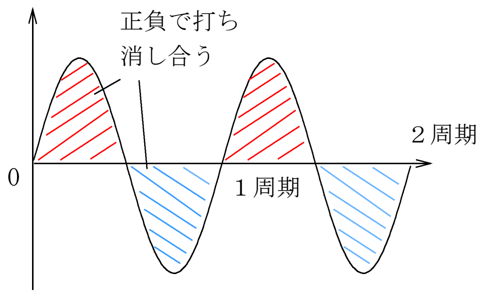
(1) 微分：$A\cos t$，積分：$-A\cos t$　(2) 微分：$-A\sin t$，積分：$A\sin t$

(3) 微分：$A\omega\cos\omega t$，積分：$-\frac{A}{\omega}\cos\omega t$　(4) 微分：$-A\omega\sin\omega t$，積分：$\frac{A}{\omega}\sin\omega t$

4

□■物理的思考■□

１周期当たりでの時間平均を求めるためにはグラフを描けばよい。$\sin x$ のグラフは次の図のようになる。



１周期で考えると，正の部分と負の部分で打ち消し合うので平均すると 0 になる。したがって，$\sin x$ の平均値 $\overline{\sin x}$ は $\overline{\sin x}=0$ となる。同様に考えると，$\overline{\cos x}=0$ も導ける・。

(1) 0　(2) 0　(3) $\frac{A}{2}$　(4) $\frac{A}{2}$

(3) 平均値として分かっているのは $\sin x$ と $\cos x$ なので式変形をしていく。

$$A\sin^2\omega t=A\frac{1-\cos2\omega t}{2}=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}\cos2\omega t$$

これより，平均値は $\frac{A}{2}$ となる。

(4)　(3) と同様に，

$$A\cos^2\omega t = A\frac{1+\cos 2\omega t}{2} = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 2\omega t$$

これより，平均値は $\frac{A}{2}$ となる。

※ただし，(3) と (4) では数学の公式（$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$）を使って式変形をしている。

□■[数学公式の確認]■□

①加法定理

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

②和積の公式

①の公式を用いると，

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

ここで，$\alpha+\beta = A$，$\alpha-\beta = B$ とおくと，$\alpha = \frac{A+B}{2}$，$\beta = \frac{A-B}{2}$ となる。A，B を用いて表現し直すと，

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

となる。この式は覚えるのではなく，加法定理から導けるようにしておきたい。

③倍角半角の公式

①の公式で $\alpha = \beta = \theta$ とおくと，

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

また，$2\theta \rightarrow \theta$ とすると，

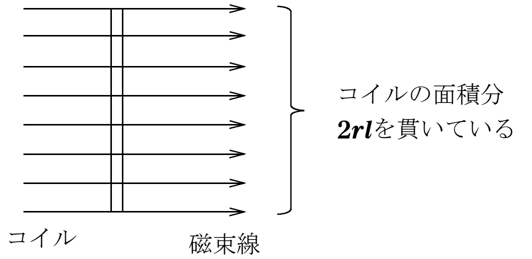
$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

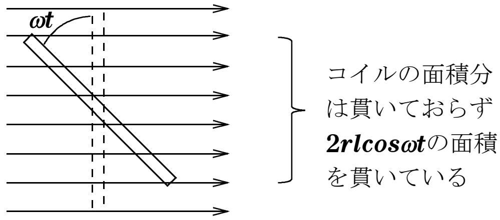
$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

となる。これも加法定理から導けるようにしたい。

5

(1)　時刻 t[s]ではコイルが時刻 0[s]から ωt[rad]回転している。時刻 0[s]の時は磁束が貫いている面積はコイルの面積 $2rl$ に等しいが，次の図から分かるように面積が減少して $2rl\cos\omega t$[m^2]になっている。($\Phi=BS$) より，コイルを貫く磁束は $2Brl\cos\omega t$[Wb]となる。





(2)　磁束の変化 $\Delta\Phi$ は，時刻 t における磁束線がコイルを貫く面積が $2rl\cos\omega t$ 増加するので，($\Phi=BS$) より，

$\Delta\Phi=B\{2rl\cos\omega(t+\Delta t)-2rl\cos\omega t\}$

となる。加法定理を用いて式変形すると，

$\Delta\Phi=B\{2rl(\cos\omega t\cos\omega\Delta t-\sin\omega t\sin\omega\Delta t)-2rl\cos\omega t\}$

となる。微小量 x について成り立つ近似式 $\sin x=x$，$\cos x=1$ を用いると，$\omega\Delta t$ を微小量とみなせることから，

$\Delta\Phi=B\{2rl(\cos\omega t-\sin\omega t\,\omega\Delta t)-2rl\cos\omega t\}=-2Brl\omega\Delta t\sin\omega t$

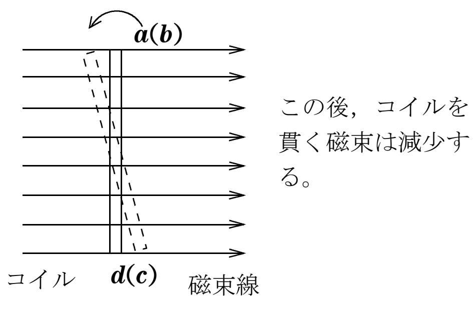
となる。ファラデーの法則（$V=-N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$）より，求める誘導起電力は，

$V=2Br\omega l\sin\omega t$

となる。

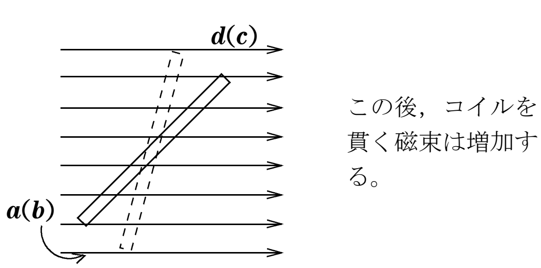
※ $2Br\omega l=V_0$ とおくと，誘導起電力は $V=V_0\sin\omega t$ と表せる。

(3)　（図１）と（図２）はコイルが回転したときの，磁束線がコイルを貫く様子を表している。（図１）は時刻 0[s]のコイルの位置を示しており，この後，コイルを貫く磁束は減少する。右向きの磁束が減少するので，これを妨げる向きは右向きとなり，レンツの法則より，この向きに磁場を作る誘導電流が流れる。右ねじの法則から，誘導電流の向きは $d\to c\to b\to a$ である。コイルが 90°以上回転した（図２）では，回転する角度が 180°になるまではコイルを貫く磁束は増加する。この変化を妨げる向きは左向きとなり，レンツの法則より，この向きに磁場を作る誘導電流が流れる。右ねじの法則から，誘導電流の向きは $d\to c\to b\to a$ である。つまり，コイルの回転角度が 0°から 180°まででは $d\to c\to b\to a$ の向きの誘導電流が流れる。コイルが 180°以上回転した（図３）から，回転する角度が 270°になるまではコイルを貫く磁束は減少する。この変化を妨げる向きは右向きとなり，レンツの法則より，この向きに磁場を作る誘導電流が流れる。右ねじの法則から，誘導電流の向きは $a\to b\to c\to d$ である。コイルが 270°以上回転した（図３）から，回転する角度が 360°になるまではコイルを貫く磁束は増加する。この変化を妨げる向きは左向きとなり，レンツの法則より，この向きに磁場を作る誘導電流が流れる。右ねじの法則から，誘導電流の向きは $a\to b\to c\to d$ である。これらをまとめると，コイルの回転角度が 180°を境にして，コイルに流れる電流の向きが変わっている。

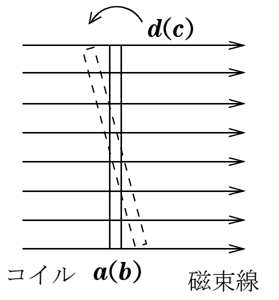


括弧内はコイルの奥の点

（図１）



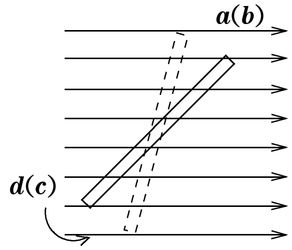
（図２）



この後，コイルを貫く磁束は減少する。

括弧内はコイルの奥の点

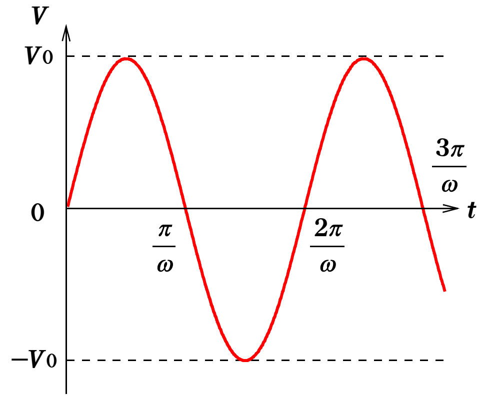
（図３）



この後，コイルを貫く磁束は増加する。

（図４）

これらのことと，誘導起電力の形が $V=V_0 \sin\omega t$ と与えられることから，グラフは次のようになる。
※問題で誘導電流の正の方向が決められているのでこのような手順で電流の正負を判断しないといけない。問題の設定によっては誘導起電力で求めた正負と解答が一致しないこともあり得る。

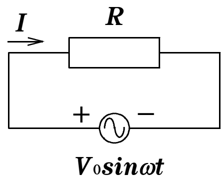


6

(1)　キルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，

$V_0 \sin\omega t = IR$

となる。



(2)　(1)を式変形すると，

$$I=\frac{V_0}{R}\sin\omega t=I_0\sin\omega t$$

となる。　これより，$I_0=\frac{V_0}{R}$，$\alpha=0$ となる。

(3)　$I_0=\frac{V_0}{R}$ とオームの法則（$V=IR \Leftrightarrow I=\frac{V}{R}$）を比較することから，リアクタンス（抵抗）は R と求まる。

(4)　（$P=IV$）より，

$P=(I_0\sin\omega t)(V_0\sin\omega t)=I_0V_0\sin^2\omega t$

となる。

(5)　(4)を数学の公式（$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$）を用いて式変形すると，

$$P=\frac{I_0V_0}{2}(1-\cos 2\omega t)$$

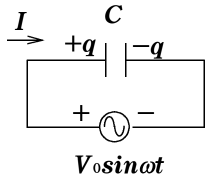
となる。また，$\overline{\cos 2\omega t}=0$ より，$\overline{P}=\dfrac{I_0V_0}{2}$ となる。

(6)　実効値は次式で表すことができる。

$$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\ ,\ V_e=\frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

これを用いると，平均消費電力 $\overline{P}$ は，$\overline{P}=I_eV_2$ となる。

7



(1)　コンデンサーの公式（$Q=CV$）とキルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，

$$V_0\sin\omega t=\frac{q}{C}$$

となる。

(2)　電流の定義式（$I=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$）において，$\Delta t$ を限りなく 0 に近づける（瞬間の電流を求める）と，

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}\to\frac{dq}{dt}\quad(\Delta t\to 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。(1)から $q=CV\sin\omega t$ となるので，これを用いると，

$$I=\frac{d(CV_0\sin\omega t)}{dt}=\omega CV_0\cos\omega t$$

となる。題意で求められる形に直すと，

$$I=\omega CV_0\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=I_0\sin(\omega t+\alpha)$$

となる。したがって，$\underline{I_0=\omega CV_0\ ,\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}}$ となる。

※電源の電圧 V は $V=V_0\sin\omega t$ で与えられるので，回路に流れる電流と電圧の位相（sin の角度を表す部分）に注目すると，電流の位相は電圧の位相に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 進んでいると言える。

(3)　$V_0=\dfrac{I_0}{\omega C}$ とオームの法則（$V=IR$）を比較することから，リアクタンス（抵抗）は $\underline{\dfrac{1}{\omega C}}$ と求まる。

(4)　（$P=IV$）より，$P=(I_0\cos\omega t)(V_0\sin\omega t)=I_0V_0\sin\omega t\cos\omega t$ となる。

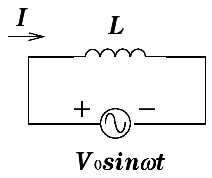
(5)　(4)を数学の公式（$\sin 2\theta=2\sin\theta\ \cos\theta$）を用いて式変形すると，$P=\dfrac{I_0V_0}{2}\sin(2\omega t)$ となる。また，$\overline{\sin(2\omega t)}=0$ より，$\overline{P}=0$ となる。

□■物理的思考■□
交流電源に抵抗をつないだ場合は，抵抗のどちらの方向に電流が流れてもジュール熱は消費される。したがって，交流電源は電力を消費する。それに対して，コンデンサーをつないだ場合は，静電エネルギーとして蓄えられる。ここで蓄えられた静電エネルギーは，反対回りの電流が流れるときに使われる。この場合，交流電源につなぐとコンデンサーでは電力が消費されない。同様に，コイルをつないだ場合も磁気エネルギーに蓄えられるので，交流電源は電力を消費しない。

8

(1)　自己誘導による起電力の公式（$V=-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$）とキルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））

より，



$$V_0\sin\omega t-L\frac{\Delta I}{\Delta t}=0$$

となる。

(2)　(1)で求めた式を変形すると，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t}=\frac{V_0}{L}\sin\omega t$$

となる。Δt を限りなく 0 に近づけると，

$$\frac{\Delta q}{\Delta t}\to\frac{dI}{dt}\quad(\Delta t\to 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。これを用いると，

$$\frac{dI}{dt}=\frac{V_0}{L}\sin\omega t$$

となる。両辺を時間 t で積分すると，

$$\int\frac{dI}{dt}dt=\int\frac{V_0}{L}\sin\omega t\,dt\Leftrightarrow\int dI=\frac{V_0}{L}\int\sin\omega t\,dt$$

となる。これを解くと，

$$I=-\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t=\frac{V_0}{\omega L}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

となる。したがって，$I_0=\dfrac{V_0}{\omega L}$ ，$\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$ となる。

※左辺は I を「t で微分」したものを「t で積分」しているので I に戻ると考える。
※本来は初期条件を考えて積分定数を考えないといけないが，今回は省略する。
※電源の電圧 V は $V=V_0\sin\omega t$ で与えられるので，回路に流れる電流と電圧の位相（$\sin$ の角度を表す部分）に注目すると，電流の位相は電圧の位相に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れていると言える。

(3)　$V_0=\omega LI_0$ とオームの法則（$V=IR$）を比較することから，リアクタンス（抵抗）は$\underline{\omega L}$と求まる。

(4)　（$P=IV$）より，

$$P=(-I_0\cos\omega t)(V_0\sin\omega t)=-I_0V_0\sin\omega t\cos\omega t$$

となる。

(5)　(4)を数学の公式（$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$）を用いて式変形すると，

$$P=-\frac{I_0V_0}{2}\sin(2\omega t)$$

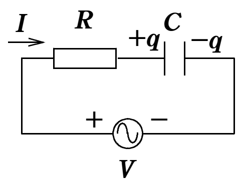
となる。また，$\overline{\sin(2\omega t)}=0$ より，$\overline{P}=0$ となる。

9

(1)　コンデンサーの公式（$Q=CV$）とキルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，

$$V=I_0R\sin\omega t+\frac{q}{C}$$

となる。



(2)　電流の定義式（$I=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$）において，$\Delta t$ を限りなく 0 に近づける（瞬間の電流を求める）と，

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}\to\frac{dq}{dt}\quad(\Delta t\to 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。題意から $I=I_0 sin\omega t$ となるので，これを用いると，

$$\frac{dq}{dt}=I_0 sin\omega t$$

となる。両辺を時間 t で積分すると，

$$q=\int I_0 sin\omega t dt=-\frac{I_0}{\omega}cos\omega t$$

となる。これを用いると，コンデンサーにかかる電圧は，

$$\frac{q}{C}=-\frac{I_0}{\omega C}cos\omega t$$

と求まる。

(3)　(2)と(3)より，

$$V=I_0 R sin\omega t-\frac{V_0}{\omega C}cos\omega t$$

となる。数学の公式（$a sin\theta+b cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}sin(\theta+\alpha)$，$tan\alpha=\dfrac{b}{a}$）を用いると，

$$V=I_0\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}sin(\omega t+\alpha),\ tan\alpha=-\frac{1}{\omega CR}$$

となる。したがって，$\underline{V_0=I_0\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2},\ tan\alpha=-\dfrac{1}{\omega CR}}$ となる。

(4)　実効値は次式で表すことができる。

$$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}},\ V_e=\frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

これを用いると，

$$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}},\ V_e=\frac{V_0}{\sqrt{2}}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

となる。

(5)　$V_e=\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ とオームの法則（$V=IR$）を比較することから，インピーダンス（回路の抵抗）は $\underline{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$ と求まる。

(6)　（$P=IV$）より，

$$P=IV=I_0^2 R sin^2\omega t-\frac{I_0V_0}{\omega C}sin\omega t cos\omega t=I_0^2 R\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos(2\omega t)\right)-\frac{I_0V_0}{\omega C}\frac{1}{2}sin(2\omega t)$$

となる。また，$\overline{sin(2\omega t)}=0$，$\overline{cos(2\omega t)}=0$ より，

$$\overline{P}=\frac{1}{2}I_0^2 R$$

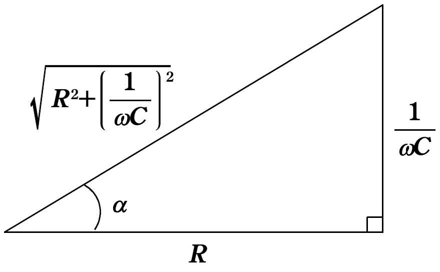
となる。

(7)　(4)と(6)より，

$$\overline{P}=I_eV_e\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=I_eV_e\cos\alpha$$

となる。

※(3)の $\tan\alpha$ の値から次のような辺の比の三角形を考えることができる。この三角形から $\cos\alpha$ の値がすぐに計算できる。



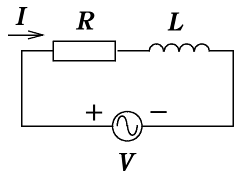
10

(1)　自己誘導による起電力の公式（$V=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$）とキルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））

より，

$$V-L\frac{\Delta I}{\Delta t}=I_0R\sin\omega t$$

となる。



(2)　単位時間当たりの電流の変化（$\frac{\Delta I}{\Delta t}$）において，$\Delta t$ を限りなく 0 に近づけると，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t}\to\frac{dI}{dt}\quad(\Delta t\to 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。題意から $I=I_0\sin\omega t$ となるので，これを用いると，

$$\frac{dI}{dt}=\omega I_0\cos\omega t$$

となる。これより，

$$-L\frac{dI}{dt}=-\omega LI_0\cos\omega t$$

となる。

(3)　(2)と(3)より，

$$V=I_0(R\sin\omega t+\omega L\cos\omega t)$$

となる。数学の公式（$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\tan\alpha=\frac{b}{a}$）を用いると，

$$V=I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\sin(\omega t+\alpha),\ \tan\alpha=\frac{\omega L}{R}$$

となる。したがって，$V_0=I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$，$\tan\alpha=\frac{\omega L}{R}$ となる。

(4)　実効値は次式で表すことができる。

$$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}},\ V_e=\frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

これを用いると，

$$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\ ,\ V_e=\frac{V_0}{\sqrt{2}}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

となる。

(5)　$V_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$ とオームの法則（$V=IR$）を比較することから，インピーダンス（回路の抵抗）は $\underline{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ と求まる。

(6)　（$P=IV$）より，

$$P=IV=I_0{}^2(R\sin^2\omega t+\omega L\sin\omega t\cos\omega t)=I_0{}^2R\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right)+I_0{}^2\omega L\frac{1}{2}\sin(2\omega t)$$

となる。また，$\overline{\sin(2\omega t)}=0$，$\overline{\cos(2\omega t)}=0$ より，

$$\overline{P}=\frac{1}{2}I_0{}^2R$$

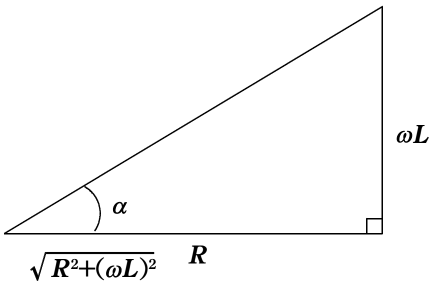
となる。

(7)　(4) と (6) より，

$$\overline{P}=I_eV_e\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=I_eV_e\cos\alpha$$

となる。

※(3) の $\tan\alpha$ の値から次のような辺の比の三角形を考えることができる。この三角形から $\cos\alpha$ の値がすぐに計算できる。

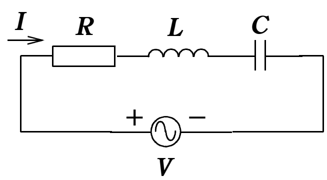


11

(1)　自己誘導による起電力の公式（$V=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$）とコンデンサーの公式（$Q=CV$），および，キルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，

$$V-L\frac{\Delta I}{\Delta t}=I_0R\sin\omega t+\frac{q}{C}$$

となる。



(2)　Δt を限りなく 0 に近づけると，

$$\frac{\Delta q}{\Delta t}\rightarrow\frac{dI}{dt}\quad(\Delta t\rightarrow 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。これを用いると，

$$\frac{dI}{dt}=\omega I_0\cos\omega t\quad\cdots①$$

となる。

また，電流の定義式（$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$）から，

$$I=\frac{dq}{dt}=I_0\sin\omega t$$

となる。両辺を t で積分すると，

$$q=-\frac{I_0}{\omega}\cos\omega t\cdots②$$

となる。①式と②式を(1)で求めた式に代入すると，

$$V=I_0\left\{R\sin\omega t+(\omega L-\frac{1}{\omega C})\cos\omega t\right\}$$

となる。数学の公式（$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\tan\alpha=\frac{b}{a}$）を用いると，

$$V=I_0\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}\sin(\omega t+\alpha)，\tan\alpha=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

となる。したがって，電流の最大値 V_0 は，

$$V_0=I_0\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

となる。

(3)　実効値は次式で表すことができる。

$$I_e=\frac{I_0}{\sqrt{2}}，V_e=\frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

これを用いると，

$$V_e=I_e\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

となる。

(4)　$V_e=I_e\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$ とオームの法則（$V=IR$）を比較することから，インピーダンス（抵抗）は $\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$ と求まる。

(5)　$I_e=\frac{V_e}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$ と表せることから，分母が最小値となる時に I_e が最大となる。したがって，$(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2=0$ を満たす時に，I_e が最大となる。よって，$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ となる。また，角周波数 ω を用いると周期 T が $T=\frac{2\pi}{\omega}$ と表せることと，周期 T を用いて周波数 f が $f=\frac{1}{T}$ と表せることから，

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

と求まる。

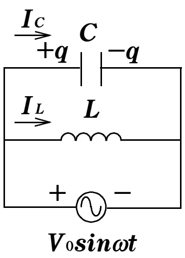
12

(1)　自己誘導による起電力の公式（$V=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$）とコンデンサーの公式（$Q=CV$），および，キルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，

$$V_0\sin\omega t-L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}=0$$

となる。これを変形すると，

$$\frac{\Delta I_L}{\Delta t}=\frac{V_0}{L}\sin\omega t$$



となる。Δt を限りなく 0 に近づけると,

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \to \frac{dI_L}{dt} \quad (\Delta t \to 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。これを用いると,

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{V_0}{L} \sin\omega t$$

となる。両辺を時間 t で積分すると,

$$\int \frac{dI_L}{dt} dt = \int \frac{V_0}{L} \sin\omega t dt \Leftrightarrow \int dI_L = \frac{V_0}{L} \int \sin\omega t dt$$

となる。これを解くと,

$$I_L = -\frac{V_0}{\omega L} \cos\omega t$$

となる。

(2)　　(4)で求めた式を題意で求められる形に直すと,

$$I_L = -\frac{V_0}{\omega L} \cos\omega t = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

となる。したがって，$I_{L0} = \frac{V_0}{\omega L}$ ，$\alpha = -\frac{\pi}{2}$ となる。

(3)　$V_0 = \omega L I_{L0}$ とオームの法則（$V = IR$）を比較することから，リアクタンス（抵抗）は ωL と求まる。

(4)　コンデンサーの公式（$Q = CV$）とキルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より,

$$V_0 \sin\omega t = \frac{q}{C} \quad \cdots ①$$

となる。電流の定義式（$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$）において，$\Delta t$ を限りなく 0 に近づける（瞬間の電流を求める）と,

$$I_C = \frac{\Delta q}{\Delta t} \to \frac{dq}{dt} \quad (\Delta t \to 0)$$

というように, 数学の微分という作業になる。①式から $q = CV \sin\omega t$ となるので,
これを用いると,

$$I_C = \frac{d(CV_0 \sin\omega t)}{dt} = \omega CV_0 \cos\omega t$$

となる。

(5)　(4)で求めた式を題意で求められる形に直すと,

$$I_C = \omega CV_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_{L0} \sin(\omega t + \alpha)$$

となる。したがって，$I_{L0} = \omega CV_0$ ，$\alpha = \frac{\pi}{2}$ となる。

(6)　キルヒホッフの第１法則（$\Sigma I_{in} = \Sigma I_{out}$）より,

$$I = I_C + I_L = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) V_0 \cos\omega t$$

となるので，最大値は $\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) V_0$ となる。。

(7)　(6)の電流の振幅を I_0 とおくと，

$$I_0=\left|\omega C-\frac{1}{\omega L}\right|V_0$$

となる。これとオームの法則（$V=IR$）を比較することから，インピーダンス（回路の抵抗）は $\dfrac{1}{\omega C-\dfrac{1}{\omega L}}$ と求まる。

(8)　(7)より I が 0 となるのは，

$$\omega C-\frac{1}{\omega L}=0$$

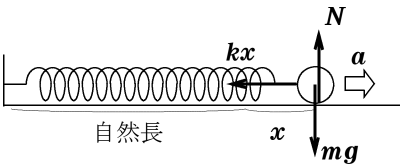
を満たすときである。したがって，$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ となる。また，角周波数 ω を用いると周期 T が $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ と表せることと，周期 T を用いて周波数 f が $f=\dfrac{1}{T}$ と表せることから，

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

と求まる。

13

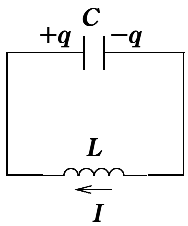
(1)　運動方程式（$ma=f$）より，



$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=-kx\cdots①$$

となる。

(2)　キルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，



$$-L\frac{\Delta i}{\Delta t}=\frac{q}{C}$$

となる。これを変形すると，

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t}=-\frac{q}{C}\cdots②$$

となる。

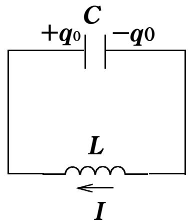
(3)　①式と②式を比較すると，以下の文字が対応していることが分かる。

単振動	共振回路	
v	i	(3)
m	L	(4)
k	$\dfrac{1}{C}$	(5)

(6)　単振動の周期が $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ と表せることから，(4)と(5)で対応する物理量から考えて，$2\pi\sqrt{LC}$ となる。

14

(1)　コイルに誘導起電力が生じるので電流が流れないので **0** となる。



(2)　エネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}\frac{q_0{}^2}{C}+\frac{1}{2}L(0)^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}LI^2$$

となる。電流が最大となるのは，$q=0$ の時なので，I の最大値は，

$$I=\frac{q_0}{\sqrt{LC}}$$

となる。

(3)　共振の周期が $2\pi\sqrt{LC}$ で与えられることから，**4** 分の **1** 周期後の $\underline{\dfrac{\pi\sqrt{LC}}{2}}$ と分かる。

(4)　(2)と同様に考えて，電流が最大となるのはコンデンサーの静電エネルギーが最小で **0** になるとき，つまり，電圧が <u>**0**</u> のときである。

15

(1)　２次コイルの誘導起電力は抵抗の電圧と等しくなるので，オームの法則（$V=IR$）より，$0.1\times 10=1$ [V]と求まる。変圧器のコイルに生じる誘導起電力は巻き数に比例するので，

$N_1 : N_2=100 : 1$

となる。

(2)　エネルギー保存則より，１次側の電力が２次側で消費されるので，（$P=IV$）より，

$I_1\times 100=(0.1)^2\times 10$

となる。これより，$\underline{I_1=1\times 10^{-3}}$ [A]と求まる。

16

(1)　$2\pi\sqrt{LC}$　(2)　電磁波　(3)　回折

17

(1)　コンデンサーの公式（$Q=CV$）とキルヒホッフの第２法則（Σ（起電力）=Σ（電圧降下））より，

$$V=I_0R\sin(2\pi ft)+\frac{q}{C}$$

となる。電流の定義式（$I=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$）において，$\Delta t$ を限りなく 0 に近づける（瞬間の電流を求める）と，

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}\rightarrow\frac{dq}{dt}\quad(\Delta t\rightarrow 0)$$

というように，数学の微分という作業になる。題意から $I=I_0\sin(2\pi ft)$となるので，これを用いると，

$$\frac{dq}{dt}=I_0\sin(2\pi ft)$$

となる。両辺を時間 t で積分すると，

$$q=\int I_0\sin(2\pi ft)dt=-\frac{I_0}{2\pi f}\cos\omega t$$

となる。これを用いると，コンデンサーにかかる電圧は，

$$\frac{q}{C}=-\frac{I_0}{2\pi fC}\cos\omega t$$

と求まる。したがって，点Ｂが接地されていて電位が 0[V]となっているので，点Ｃの電位は $-\dfrac{q}{C}=\dfrac{I_0}{2\pi fC}\cos(2\pi ft)$となり，点Ａの電位は$I_0R\sin(2\pi ft)$ となる。点Ａから，点Ｂ，点Ｃに進むにつれて電位が低くなっていることに注意したい。

(1)　$I_0R\sin(2\pi ft)$　(2)　$\dfrac{I_0}{2\pi fC}\cos(2\pi ft)$

(3)　題意より，点Ｂ´に対する点Ａ´の電位が V のとき，光点の x 座標は kV となる。これを利用すると，光点の x 座標が点Ｂ´（Ｂ）に対する点Ａ´（Ａ）の電位，光点の y 座標が点Ｂ´（Ｂ）に対する点Ｃ´（Ｃ）の電位で決まるので，

$$x=kI_0R\sin(2\pi ft),\quad y=k\left(\frac{I_0}{2\pi fC}\cos(2\pi ft)\right)$$

となる。

(4)　(3)と$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$より，

$$\left(\frac{x}{kI_0R}\right)^2+\left(\frac{2\pi fCy}{kI_0}\right)^2=1$$

となる。（楕円形）

(5)　自己誘導による起電力の公式（$V=-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$）より，コイルに生じる起電力 V_L は，

$$V_L=-L\frac{d}{dt}(I_0\sin(2\pi ft))=-2\pi fLI_0\cos(2\pi ft)$$

となる。これがＡＢＣ間の電圧となるので，点Ａの電位は$-V_L=2\pi fLI_0\cos(2\pi ft)$となる。これより，交点の座標は，

$$x=2\pi kfLI_0\cos(2\pi ft),\quad y=k\left(\frac{I_0}{2\pi fC}\cos(2\pi ft)\right)$$

となる。これより軌跡は，

$$y=\frac{x}{(2\pi f)^2CL}$$

となる。