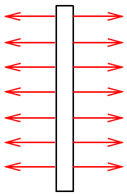
物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

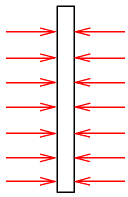
No.23
コンデンサー編
ブツリヨキワメヨ

1

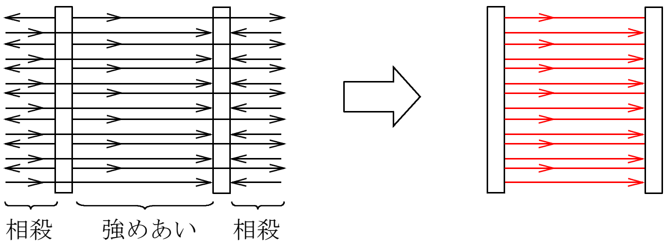
(1)　電気力線は正電荷から出て負電荷に入るので，極板Aから出るような電気力線となる。



(2)　(1) と同様に考えると，極板Bに入るような電気力線となる。



(3)　電気力線は電場の矢印を連続的に描いたものなので，電気力線が重なる場合は電場の合成と同じように考える。極板AとBの間では同じ向きなので強め合い本数が **2** 倍に，それ以外では反対向きになるので打ち消し合い **0** 本になる。



(4)　極板Aの電気量は $\boldsymbol{Q}$[C] なので $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本] となるが，極板Aからは極板B側と反対側に半分ずつ電気力線が出ている。これより，極板Aから極板B側には $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}$[本] の電気力線が出ている。同様に極板Bにも電気力線が $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本] 入っているが，極板A側からが $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}$[本] となっている。したがって，極板AとBの間には合わせて $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本] の電気力線がある。

(5)　電場の強さが $\boldsymbol{E}$ の場所で電気力線は単位面積当たり $\boldsymbol{E}$[本] 引くので，面積 $\boldsymbol{S}$ の極板AとBの間には $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本] の電気力線があることから，電場の強さは，

$$\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon S}}$$

(6)　一様な電場になっているので，($\boldsymbol{V=Ed}$) より，

$$\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon S}}\boldsymbol{d}$$

(7)　(6) を式変形すると，

$$\boldsymbol{Q}=\frac{\boldsymbol{\varepsilon S}}{\boldsymbol{d}}\times \boldsymbol{V}$$

(8)　**電気容量**（**静電容量**）

(9)　[**F**]（ファラド），[**C/V**]

2

(1)　$\left(C=\dfrac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$[F]となる。

(2)　d が $2d$ になるので，$\dfrac{1}{2}$倍となる。

(3)　ε が ε_0 になるので，$\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$倍となる。

(4)　比誘電率 ε_r を用いると誘電率は $\varepsilon_r\varepsilon_0$ となるので，ε_r 倍となる。

(5)　p（ピコ）は 10^{-12}，μ（マイクロ）は 10^{-6} を表すので，
1[F]$=10^6$[μF]$=10^{12}$[pF]

3

(1)　コンデンサーの合成容量は以下の式で与えられる。

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Ci}\ （直列），\ C=\sum_{i=1}^{n}Ci\ （並列）$$

よって，C_1+C_2となる。

(2)　合成容量を C とすると，

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\Leftrightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

□■物理的思考■□

コンデンサーの合成容量を使う問題は少ないが，合成容量の導出はコンデンサーの問題を理解する上で大切になる。

まずは並列の合成容量から証明しよう。電気容量が C_1 と C_2 のコンデンサーが並列につながれているとする。互いのコンデンサーの上部と下部では導線でつながれているため等電位となっている。（$Q=CV$）より，それぞれのコンデンサーに蓄えられている電気量は，

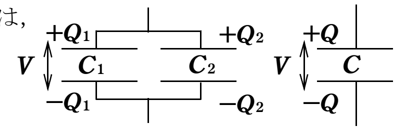
$$Q_1=C_aV,\ Q_2=C_2V\cdots①$$

となっている。合成したコンデンサーが蓄えている電気量 Q は，

$$Q=Q_1+Q_2\cdots②$$

となるので，①式と②式より，

$$Q=(C_1+C_2)V$$



と変形できるので，合成容量がC_1+C_2と分かる。

次に直列の場合を考える。電気容量が C_1 と C_2 のコンデンサーが直列につながれているとすると，C_1 の上部と C_2 の下部が合成したコンデンサーの極板部分に相当する。したがって，合成したコンデンサーが蓄えている電気量を Q とすると，C_1 と C_2 のコンデンサーが蓄える電気量も Q となっている。（$Q=CV$）より，それぞれのコンデンサーにかかっている電圧は，

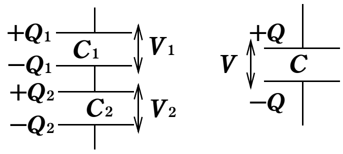
$$V=\frac{Q}{C},\ V_1=\frac{Q}{C_1},\ V_2=\frac{Q}{C_2}\cdots③$$

となる。また，電圧の関係式から，

$$V=V_1+V_2\cdots④$$

となる。③式と④式から整理すると，

$$V=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)Q$$



と変形できるので，合成容量 C が，

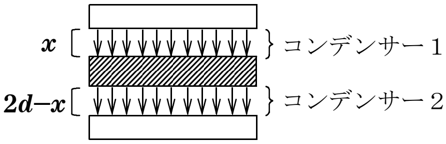
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\Leftrightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

となると分かる。

4

(1)　$\left(C=\frac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，$C=\frac{\varepsilon_0 S}{3d}$ [F] となる。

(2)　導体をコンデンサーに挿入すると，導体内には逆向きの電場が生じて合成電場が 0 になる（静電誘導）。電気力線の様子は図のような状態となるので，コンデンサーが 2 つ直列に繋がれていると考えられる。

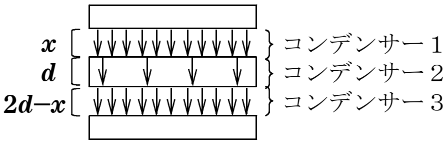


コンデンサー 1 と 2 の電気容量は $\left(C=\frac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，それぞれと $\frac{\varepsilon_0 S}{x}$，$\frac{\varepsilon_0 S}{2d-x}$ なるので，合成容量 C は，

$$\frac{1}{C}=\frac{x}{\varepsilon_0 S}+\frac{2d-x}{\varepsilon_0 S}=\frac{2d}{\varepsilon_0 S}\Leftrightarrow C=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

※これは，導体部分をそのまま引っこ抜いて考えたときの電気容量と同じ値になっている。

(3)　誘電体をコンデンサーに挿入すると，誘電体が分極を起こしコンデンサー内の電場を少しだけ打ち消す（誘電分極）。電気力線の様子は図のような状態となるので，コンデンサーが 3 つ直列に繋がれていると考えられる。

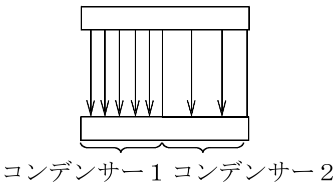


コンデンサー 1 ～ 3 の電気容量は $\left(C=\frac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，それぞれと $\frac{\varepsilon_0 S}{x}$，$\frac{\varepsilon S}{d}$，$\frac{\varepsilon_0 S}{2d-x}$ なるので，合成容量 C は，

$$\frac{1}{C}=\frac{x}{\varepsilon_0 S}+\frac{d}{\varepsilon S}+\frac{2d-x}{\varepsilon_0 S}=\frac{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\Leftrightarrow C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

※これは，極板間距離が $2d$ で中が真空のコンデンサーと極板間距離が d の中が誘電体のコンデンサーが直列に繋がれているときと同じ値になっている。

(4)　(3) と同様に考えると電気力線の様子は図のようになっている。



コンデンサー 1 と 2 の電気容量は $\left(C=\frac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，それぞれと $\frac{\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{3d}$，$\frac{\varepsilon \frac{S}{2}}{3d}$ なるので，合成容量 C は，

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{6d}+\frac{\varepsilon S}{6d}=\frac{(\varepsilon_0+\varepsilon)S}{6d}$$

(5)　比誘電率 ε_r は誘電体の誘電率 ε が真空の誘電率$_0$ の何倍かを表したものなので，$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0\Leftrightarrow\varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ となる。

5

(1)　（$Q=CV$）より，かかる電圧 v は$v=\dfrac{q}{C}$[V]となる。

(2)　Δq[C]の電荷をさらに運ぶ間，コンデンサーの電圧が(1)で求めた値のまま変わらないものとすると，コンデンサーの電場に逆らって電荷を運んだ仕事 Δw は，（$W=qV$）より，

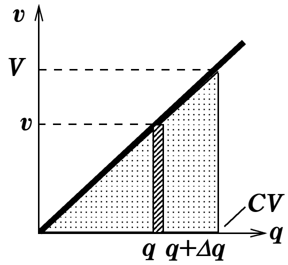
$$\Delta w=\Delta q\times v=\frac{q\Delta q}{C}\,[\mathrm{J}]$$

(3)　コンデンサーの電圧が電池の電圧と等しくなるので，（$Q=CV$）より，蓄えられている電気量は CV[C]となる。

(4)　コンデンサーの電気量を q から $q+\Delta q$ に増やすのに必要な仕事は(2)で求めた Δw である。縦軸を $\dfrac{q}{C}$（電圧），横軸を q としたグラフで表すと図のような直線になっており，Δw は図中の長方形の面積を表している。コンデンサーの電気量を 0 から CV までためるのに必要な仕事はこの長方形を集めたもの，つまり，図中の三角形の面積になっているので，求める仕事 W は，

$$W=\frac{1}{2}CV\times V=\frac{1}{2}CV^2$$

となる。



※コンデンサーの電気を蓄えるにした仕事はコンデンサーにエネルギーとして蓄えられる。これを静電エネルギーという。静電エネルギーは（$Q=CV$）を用いて，次のように変形できる。

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

(5)　コンデンサーに蓄えられた電気量の分だけ電荷を運んだので，電池のした仕事は（$W=qV$）より，

$$W=CV\times V=CV^2\,[\mathrm{J}]$$

(6)　エネルギー保存の法則から，電池のした仕事はコンデンサーの静電エネルギーとジュール熱 Q に分配されるので，

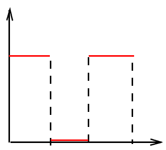
$$CV^2=\frac{1}{2}CV^2+Q\Leftrightarrow Q=\frac{1}{2}CV^2$$

6

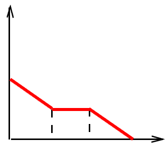
(1)　導体部分を引っこ抜いて考えると，極板間距離が $d-a$ のコンデンサーになるので，（$C=\dfrac{\varepsilon S}{d}$）より，

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d-a}\,[\mathrm{F}]$$

(2)　導体内部では静電誘導を起こすのでコンデンサーに蓄えられた電気量が作る電場を打ち消す。したがって，図のような答えなる。



(3)　($V=Ed$) から考えると，極板Bからの距離 d に比例して電位は上がる。導体内では $E=0$ になることに注意すると，図のようになる。



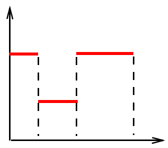
(4)　電気量 Q は変わらず，電気容量 C だけが変わるので，($U=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$) より，

$$\Delta U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d-a}}-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}}=-\frac{Q^2a}{2\varepsilon_0 S}$$

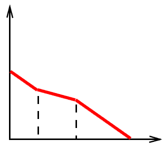
(5)　極板間距離が $d-a$ の真空部分からなるコンデンサーと極板間距離が a の誘電体部分からなるコンデンサー２つが直列につながれていると考えて，

$$\frac{1}{C}=\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d-a}\right)^{-1}+\left(\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{a}\right)^{-1}\Leftrightarrow C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r(d-a)+a}$$

(6)　誘電体内部では誘電分極を起こすのでコンデンサーに蓄えられた電気量が作る電場をわずかに打ち消す。このため電場は少しのこり，答えは図のようになる。



(7)　($V=Ed$) から考えると，極板Bからの距離 d に比例して電位は上がる。誘電体内では電場が弱まることに注意すると，図のようになる。



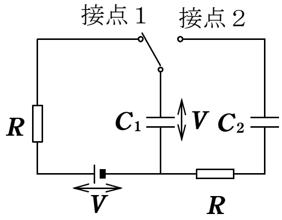
(7)　電気量 Q は変わらず，電気容量 C だけが変わるので，($U=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$) より，

$$\Delta U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r(d-a)+a}}-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}}=-\frac{(\varepsilon_r-1)Q^2a}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}$$

7

□■物理的思考■□
　コンデンサーの問題では「十分に時間が経過すると」という表現がよく出てくる。これは，コンデンサーに電池をつなぐと充電が開始されるが，十分に時間が経過するということは充電が完了したことを表している。充電が完了すると，コンデンサーにはこれ以上電気が蓄えられないので電流が流れなくなる。

(1)　コンデンサー C_1 に電流が流れないので，抵抗にも電流が流れていない。したがって，電池とコンデンサー C_1 の電圧が等しくなっている。($Q=CV$) より，$\underline{CV}$ [C] と求まる。



(2)　コンデンサー C_1 に蓄えられた電気量は電池が運んだものなので，電池がこの電気量を運ぶのにした仕事は ($W=qV$) より，

$$CV\times V=CV^2$$

となる。一方，コンデンサー C_1 に蓄えられる静電エネルギーは ($U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$) より，

$$\frac{1}{2}CV\times V=\frac{1}{2}CV^2$$

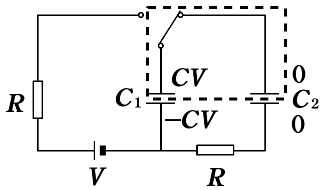
となる。エネルギー保存則から電池のした仕事はコンデンサー C_1 の静電エネルギーとジュール熱 Q に分配されるので，

$$CV^2=\frac{1}{2}CV^2+Q\Leftrightarrow Q=\frac{1}{2}CV^2\ [\mathrm{J}]$$

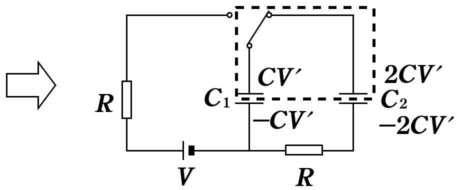
(3)　スイッチを接点２につなぐことでコンデンサー C_1 と C_2 からなる回路になる。スイッチを接点２につないだ直後はコンデンサー C_1 の電圧が V に対して，コンデンサー C_2 の電圧が 0 なので，コンデンサー C_1 から C_2 に電気が流れて，コンデンサー C_1 が放電し，コンデンサー C_2 が充電される。十分時間が経過すると，互いの電圧が等しくなり，電流が流れなくなる。このときの電圧を V' とすると，コンデンサーに蓄えられている電気量は ($Q=CV$) より，

CV'，$2CV'$ [C]

となる。ここで，下の図の点線で囲まれた部分に注目したい。



接点２につないだ直後



十分時間が経過した後

この部分（コンデンサー C_1 の上極板とコンデンサー C_2 の上極板）は外部との接触がないので，電気量が保存される。これを絶縁部分の電気量保存則という。これより，

$$CV+0=CV'+2CV'\Leftrightarrow V'=\frac{V}{3}$$

となるので，コンデンサー２に蓄えられている電気量は，

$$2C\times\frac{V}{3}=\frac{2CV}{3}\ [\mathrm{C}]$$

※コンデンサー１に蓄えられている電気量は $C\times\frac{V}{3}=\frac{CV}{3}$ [C] となっている。

(4)　コンデンサー C_1 の電気量の変化から，

$$CV-\frac{1}{3}CV=\frac{2}{3}CV\ [\mathrm{J}]$$

の電気がコンデンサー C_2 に流れたと分かる。

(5)　今回は電池は仕事をしていないので，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの変化から考える。スイッチを接点２につないでから十分時間が経過するまでに，２つのコンデンサーの静電エネルギーの和

の変化 ΔU は（$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$）より，

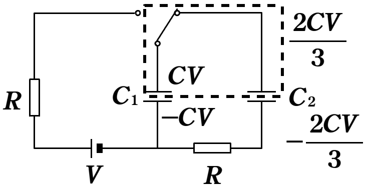
$$\Delta U=\left\{\frac{1}{2}C\left(\frac{V}{3}\right)^2+\frac{1}{2}2C\left(\frac{V}{3}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}CV^2=-\frac{1}{3}CV^2$$

エネルギー保存則より，この減少したエネルギーが抵抗で発生したジュール熱となるので，$\underline{\frac{1}{3}CV^2}$［J］となる。

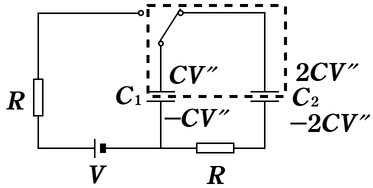
(6)　スイッチを接点１につなぐことで，コンデンサー C_1 が再び電池によって充電され電圧が V となる。この後，スイッチを接点２につなぐと，再び２つのコンデンサーの電圧が異なるために電気が流れ、コンデンサー C_1 が放電し，コンデンサー C_2 が充電される。十分時間が経過すると，互いの電圧が等しくなり，電流が流れなくなる。このときの電圧を V'' とすると，コンデンサーに蓄えられている電気量は（$Q=CV$）より，

CV''，$2CV''$［C］

となる。(3)と同様に，下の図のようにコンデンサーに蓄えられている電気量から絶縁部分について電気量保存則を立てると，



接点２につないだ直後



十分時間が経過した後

$$CV+\frac{2}{3}CV=CV''+2CV''\Leftrightarrow V''=\frac{5V}{9}$$

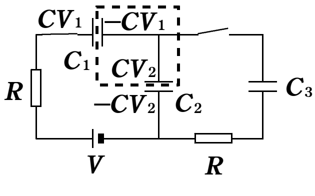
となる。

8

(1)　コンデンサー C_1 と C_2 は電池に直列につながれているので，２つのコンデンサーの電圧の和が電池の電圧と等しくなっている。コンデンサー C_1 と C_2 の電圧をそれぞれ V_1，V_2 とおくと，$V_1+V_2=V$ となる。また，コンデンサーに蓄えられている電気量は（$Q=CV$）より，

CV_1，CV_2［C］

となる。また，スイッチ２が開いたままなので，下図の点線部分（コンデンサー C_1 の右極板とコンデンサー C_2 の上極板）が絶縁部分になっていることから，この部分についての電気量保存則より，



$$-CV_1+CV_2=0\Leftrightarrow V_1=V_2$$

以上２式より，

$$V_1=V_2=\frac{V}{2}$$

となる。これより，コンデンサー C_2 に蓄えられている電気量は $\underline{\frac{1}{2}CV}$［J］と分かる。

(2)　コンデンサー C_1 に蓄えられた電気量は電池が運んだものなので，電池がこの電気量を運ぶのにした仕事は（$W=qV$）より，

$$\frac{CV}{2}\times V=\frac{1}{2}CV^2$$

となる。一方，コンデンサー C_1 と C_2 に蓄えられる静電エネルギーは（$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$）より，

$$\frac{1}{2}C\times\left(\frac{V}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{4}CV^2$$

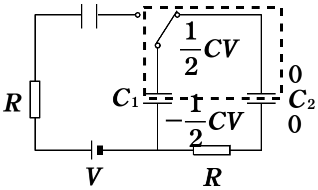
となる。エネルギー保存則から電池のした仕事はコンデンサー C_1 と C_2 の静電エネルギーとジュール熱 Q に分配されるので，

$$\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{4}CV^2+Q\Leftrightarrow Q=\frac{1}{4}CV^2\,[\mathrm{J}]$$

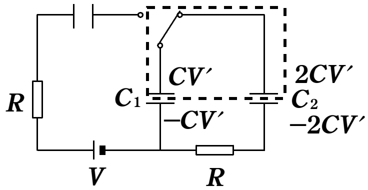
(3)　スイッチ１を開き，スイッチ２を閉じることでコンデンサー C_2 と C_3 からなる回路になる。スイッチ２を閉じた直後はコンデンサー C_2 の電圧が $\frac{V}{2}$ に対して，コンデンサー C_3 の電圧が 0 なので，コンデンサー C_2 から C_3 に電気が流れて，コンデンサー C_2 が放電し，コンデンサー C_3 が充電される。十分時間が経過すると，互いの電圧が等しくなり，電流が流れなくなる。このときの電圧を V' とすると，コンデンサーに蓄えられている電気量は（$Q=CV$）より，

CV'，$2CV'$ [C]

となる。ここで，次の図の点線で囲まれた部分に注目したい。



接点２につないだ直後



十分時間が経過した後

この部分（コンデンサー C_2 の上極板とコンデンサー C_3 の上極板）が絶縁部分となっているので，この部分について電気量保存則より，

$$\frac{1}{2}CV+0=CV'+2CV'\Leftrightarrow V'=\frac{V}{6}$$

となるので，コンデンサー２に蓄えられている電気量は，

$$C\times\frac{V}{6}=\frac{CV}{6}\,[\mathrm{C}]$$

※コンデンサー３に蓄えられている電気量は $2C\times\frac{V}{6}=\frac{CV}{3}$ [C] となっている。

(4)　コンデンサー C_2 の電気量の変化から，

$$\frac{1}{2}CV-\frac{1}{6}CV=\frac{1}{3}CV\,[\mathrm{J}]$$

の電気がコンデンサー C_3 に流れたと分かる。

(5)　今回は電池は仕事をしていないので，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの変化から考える。スイッチ２を閉じてから十分時間が経過するまでに，２つのコンデンサーの静電エネルギーの和の変化 ΔU は（$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$）より，

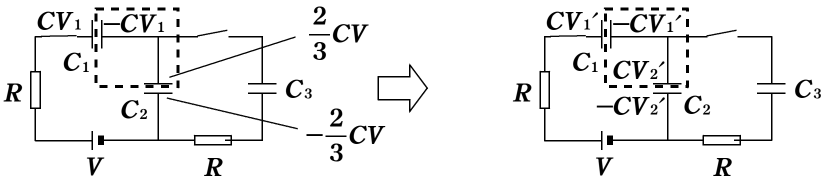
$$\Delta U=\left\{\frac{1}{2}C\left(\frac{V}{6}\right)^2+\frac{1}{2}2C\left(\frac{V}{6}\right)^2\right\}-\frac{1}{8}CV^2=-\frac{1}{12}CV^2$$

エネルギー保存則より，この減少したエネルギーが抵抗で発生したジュール熱となるので，$\frac{1}{12}CV^2$ [J] となる。

(6)　スイッチ２を開きスイッチ１を閉じると，(1)の状態よりコンデンサー C_2 にかかる電圧が下がっているので再び充電される。コンデンサー C_1 と C_2 の電圧をそれぞれ V_1'，V_2' とおくと，$V_1'+V_2'=V$ となる。また，コンデンサーに蓄えられている電気量は（$Q=CV$）より，

CV_1', CV_2' [C]

となる。また，スイッチ２が開いたままなので，下図の点線部分（コンデンサー C_1 の右極板とコンデンサー C_2 の上極板）が絶縁部分になっていることから，この部分についての電気量保存則より，



$$-CV_1'+CV_2'=-\frac{1}{2}CV+\frac{1}{6}CV$$

以上２式より，

$$V_1'=\frac{2}{3}V,\ V_2'=\frac{V}{3}$$

となる。

9

(1)　$\left(C=\dfrac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，

$\dfrac{\varepsilon_0 hl}{d}$ [F]

(2)　真空部分と誘電体部分との並列になるので，合成容量 C は，

$$C=\frac{\varepsilon_0 h(l-x)}{d}+\frac{\varepsilon hx}{d}=\frac{\varepsilon_0 hl+(\varepsilon-\varepsilon_0)hx}{d}\ [\mathrm{F}]$$

(3)　誘電体をさらに Δx 挿入したときのコンデンサーの電気容量 C'は，(2)で $x\to x+\Delta x$ とすることより，

$$C'=\frac{\varepsilon_0 hl+(\varepsilon-\varepsilon_0)h(x+\Delta x)}{d}$$

となる。電池につながれたままなのでコンデンサーの電圧が変わらないことから，静電エネルギーの変化 ΔU は $\left(U=\dfrac{1}{2}CV^2\right)$ より，

$$\Delta U=\frac{1}{2}C'V^2-\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(C'-C)V^2=\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}\Delta x$$

(4)　コンデンサーに蓄えられている電気量の変化は，$(Q=CV)$ より，

$$(C'-C)V=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV}{d}\Delta x$$

電池のした仕事は $(W=qV)$ より，

$$\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}\Delta x$$

(5)　エネルギー保存則から考えると，電池のした仕事と外部からした仕事 W の和がコンデンサーの静電エネルギーとなるので，

$$\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}\Delta x+W=\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}\Delta x\Leftrightarrow W=-\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}\Delta x$$

(6)　(5)から外部からした仕事が負になることが分かった。これより，誘電体を挿入する方向とは反対向きに力を加えていたことが分かる。ここでした仕事は誘電体をゆっくりと運ぶための仕事である。外部から加える力が誘電体を挿入する方向と反対向きということは，誘電体には挿入する方向に力が働いていたことになる。したがって，答えはイとなる。

※誘電分極により誘電体の上部は負に，下部は正に少しだけ帯電する。これが，近くにある極板とは正負反対の電気量となっているので，誘電体はコンデンサーに引き込まれる向きに力を受けている。

(7)　(6)の説明から，外部から加えている力と挿入する方向は反対になっていることから負の仕事となっていることに注意して，(仕事＝力× 距離）より，

$W=-F\Delta x$

(8)　(5)と(7)が等しくなることから，

$F=\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}$

10

(1)　($C=\frac{\varepsilon S}{d}$）より，分母にある極板間距離 d が 2 倍になるので，電気容量は半分の $\frac{C}{2}$ となる。

(2)　スイッチを開いているのでコンデンサーの電気量が変わらないので，コンデンサーの静電エネルギーは ($U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$）より，

$U'=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{C}{2}}=\frac{Q^2}{C}$ [J]

となる。一方，極板を広げる前の静電エネルギーは,

$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

となるので，$U'=2U$ と求まる。

(3)　(2)より，静電エネルギーの変化は,

$U'-U=2U-U=U$

となる。エネルギー保存則から，外部からした仕事 W が静電エネルギーの変化になると分かるので，$W=U$ と求まる。

※この仕事が正になっていることから,外部から加えた力は極板を広げる向きになっていることが分かる。また，ゆっくり運ぶための仕事であることから，極板には極板同士が近づく向きに力が働いている（極板間引力）ことが分かる。

(4)　スイッチをつないだままなので電流が流れてコンデンサーに蓄えられている電気量は変化する。一方，電池につながれたままなのでコンデンサーの電圧は V のままとなっている。コンデンサーの静電エネルギーは ($U=\frac{1}{2}CV^2$）より，

$U''=\frac{1}{2}\frac{C}{2}V^2=\frac{1}{4}CV^2$ （ここで解答を終わってもよい）

となる。一方、極板を広げる前の静電エネルギーは,

$U=\frac{1}{2}CV^2$

となるので，$U''=\frac{1}{2}U$ と求まる。

(5)　コンデンサーに蓄えられている電気量は ($Q=CV$）より，

$\frac{CV}{2}$

なので，極板を広げる前の CV よりも減少している。コンデンサーに蓄えられた電気量が放電しているので，電流が流れた向きは時計回りとなっている。

※電流の向きは正の電気量が移動する向きである。

(6)　(4) より静電エネルギーの変化が,

$$U''-U=-\frac{1}{2}U$$

と分かる。このエネルギー変化はエネルギー保存則より，極板を広げるのに外部の力がした仕事 W と電池のした仕事の和となる。電池のした仕事は（$W=qV$）から求まるが，電流が流れた向きと電池が電流を流そうとする向きが反対になることに注意すると,

$$-\frac{CV}{2}V$$

となる。これと，先述のエネルギー保存則から,

$$W+\left(-\frac{CV^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}U=-\frac{CV^2}{4}\Leftrightarrow W=\frac{CV^2}{4}>0$$

よって，外部から加えた力のした仕事は正となる。

※極板同士は正負反対の電気量が帯電しているので引き合う力が働いている。極板間隔を広げるためには，外部から広げる方向に力を加えないといけない。このため，極板の移動方向と力の方向が同じになるで正の仕事となる。

11

(1)

(a)　（$C=\frac{\varepsilon S}{d}$）より，コンデンサーの電気容量は，最初の極板間隔を d とすると,

変化前：$\frac{\varepsilon_0 S}{d}$，変化後：$\frac{\varepsilon_0 S}{d+\Delta d}$

となる。電気量が変わらないことから，静電エネルギーの変化は（$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$）より,

$$\frac{1}{2}\frac{(d+\Delta d)q^2}{\varepsilon_0 S}-\frac{1}{2}\frac{dq^2}{\varepsilon_0 S}=\frac{1}{2}\frac{\Delta dq^2}{\varepsilon_0 S}$$

(b)　極板間に働く力を f とすると，極板を広げるには同じ大きさで反対向きの力を極板に加えないといけない。極板を広げる方向に加えた力が極板を d だけ広げるので，この力がした仕事は（仕事＝力× 距離）より，$f\Delta d$ となる。この仕事が静電エネルギーの変化になることから,

$$f\Delta d=\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_0 S}\Delta d\Leftrightarrow f=\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_0 S}$$

(2)

(a)　おもりを乗せる前と乗せた後のばねの伸びをそれぞれ x_1，x_2 とすると，極板Ａに働く力のつり合いより,

$kx_1=mg$，$kx_2=2mg$

したがって，おもりを乗せる前とくらべたばねの伸びは,

$$x_2-x_1=\frac{mg}{k}$$

(b)　(1-b) より極板Ａに働く（電気的な）力の大きさは,

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

となる。この大きさが mg と等しくなるので,

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}=mg\Leftrightarrow Q=\sqrt{2\varepsilon_0 Smg}$$

(c)　ばねの伸びを x，ばねが伸びる方向の加速度を a として，運動方程式（$ma=f$）を立てると,

$$2ma=-kx+2mg+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}=-kx+3mg$$

整理すると，

$$2ma=-k(x-\frac{3mg}{k})\Leftrightarrow a=-\frac{k}{2m}(x-\frac{3mg}{k})$$

となり，中心が$x=\frac{3mg}{k}$で，角振動数$\sqrt{\frac{k}{2m}}$の単振動をしていることが分かる。

また，($T=\frac{2\pi}{\omega}$) より，周期は，

$$2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

となる。今は，おもりを置いた位置では速さが 0 となっているので，この点は単振動の「端」になっている。同じ位置に戻るまでなので，**1** 周期後となる。よって，$2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$ となる。

12

(1)　極板Ｂが接地されているので電位が **0**[V]となっている。電池の電圧，つまり，電位差が V[V]になっているので，極板Ａの電位は$-V$[V]となっている。

(2)　($C=\frac{\varepsilon S}{d}$) より，極板Ａと極板Ｂからなるコンデンサーの電気容量は，

$$\frac{\varepsilon_0 S}{3d}$$

となる。また，($Q=CV$) より，

$$\frac{\varepsilon_0 S}{3d}V$$

となる。極板Ｂの電位が **0**[V]なので，極板Ａの電位は$-\frac{\varepsilon_0 S}{3d}V$となる。

(3)　極板Ａと極板Ｂからなるコンデンサー１と極板Ｂと極板Ｃからなるコンデンサー２を考える。スイッチを切る前の極板Ｃの電位は **0**[V]なので，($Q=CV$) より，コンデンサー２には，$\frac{\varepsilon_0 S}{d}V$の電気量が蓄えられている。極板Ａと極板Ｃは等電位になっており，この電位を$-V'$[V]とすると，２つのコンデンサーにかかる電圧はともに V'[V]となっている。したがって，($Q=CV$) より，スイッチを切ってから十分時間が経過したあとにコンデンサーに蓄えられている電気量は，電気容量が変化していることに注意すると，

コンデンサー１：$\frac{\varepsilon_0 S}{2d}V'$　　コンデンサー２：$\frac{\varepsilon_0 S}{2d}V'$

となっていることが分かる。次の図の点線で囲まれた場所が絶縁部分になっていることから，電気量保存則より，

$$-\frac{\varepsilon_0 S}{2d}V'-\frac{\varepsilon_0 S}{2d}V'=-\frac{\varepsilon_0 S}{3d}V-\frac{\varepsilon_0 S}{d}V$$

これを解くことより，$V'=\frac{4}{3}V$となる。これより，極板Ａと極板Ｃの電位は$-\frac{4}{3}V$となる。

(4)　静電エネルギーの変化は ($U=\frac{1}{2}CV^2$) より，

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\frac{4}{3}V)^2+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\frac{4}{3}V)^2-\left\{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{3d}V^2+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}V^2\right\}=\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 S}{d}V^2$$

(5)　エネルギーの関係から，外力のした仕事が静電エネルギーの変化に等しくなるので，外力のした仕事は$\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 S}{d}V^2$となる。