

1

- (1) 各状態での温度を T_B , T_C , T_D とし、ボイルシャルル則 ($\frac{PV}{T} = \text{一定}$) より、

$$\frac{PV}{T} = \frac{5PV}{T_B} = \frac{5P \times 5V}{T_C} = \frac{P \times 5V}{T_D}$$

これを式変形すると、

$$T_B = 5T, T_C = 25T, T_D = 5T$$

- (2) 気体が仕事をしているのは $B \rightarrow C$ のみで、 $B \rightarrow C$ で気体のした仕事 W_2 は ($W = p\Delta V$) より、

$$W_2 = 5P \times (5V - V) = 20PV$$

- (3) 気体が仕事をされているのは $D \rightarrow A$ のみで、 $D \rightarrow A$ で気体がされた仕事 W_4 は ($W = p\Delta V$) より、

$$W_4 = P \times (5V - V) = 4PV$$

- (4) $A \rightarrow B$ の過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_1 の分だけ増えて、気体が仕事 W_1 した分だけ疲れて減るので、

$$\Delta U = Q_1 - W_1$$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと体積変化が無いことから気体のした仕事が 0 と

なることより、

$$\frac{3}{2}nR(5T - T) = Q_1 - 0 \Rightarrow Q_1 = 6nRT$$

状態 A について、状態方程式 ($PV = nRT$) より、

$$PV = nRT \dots \textcircled{1}$$

以上より、

$$Q_1 = 6PV \text{ (吸収)}$$

- (5) $B \rightarrow C$ の過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_2 の分だけ増えて、気体が仕事 W_2 した分だけ疲れて減るので、

$$\Delta U = Q_2 - W_2$$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと (2) で求めた気体のした仕事より、

$$\frac{3}{2}nR(25T - 5T) = Q_2 - 20PV \Rightarrow Q_2 = 30nRT + 20PV$$

これと①式より、

$$Q_2 = 50PV \text{ (吸収)}$$

- (6) $C \rightarrow D$ の過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_3 の分だけ増えて、気体が仕事 W_3 した分だけ疲れて減るので、

$$\Delta U = Q_3 - W_3$$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと体積変化が無いことから気体のした仕事が 0 と

なることより、

$$\frac{3}{2}nR(5T - 25T) = Q_3 - 0 \Rightarrow Q_3 = -30nRT$$

これと①式より、

$$Q_3 = -30PV \text{ (吸収)}$$

したがって、**30PV 放出**したことになる。

- (7) D→Aの過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_4 の分だけ増えて、気体が仕事 W_4 された分だけ増えるので、
 $\Delta U=Q_4+W_4$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと (3) で求めた気体のした仕事より、

$$\frac{3}{2}nR(5T-T)=Q_4+4PV \Leftrightarrow Q_4=-6nRT-4PV$$

これと①式より、

$$Q_2=-10PV \text{ (吸収)}$$

したがって、**10PV 放出**したことになる。

(別解)

単原子分子理想気体の定圧モル比熱 $C_p=\frac{5}{2}R$ と定圧モル比熱 $C_v=\frac{3}{2}R$ を用いると、モル比熱は気体 1[mol] を 1[K] 上げるのに必要な熱量なので、

$$A \rightarrow B \text{ では、 } Q_1=nC_v\Delta T=n\frac{3}{2}R(5T-T)=6nRT=6PV \text{ (}\because \text{①式)}$$

$$B \rightarrow C \text{ では、 } Q_2=nC_p\Delta T=n\frac{5}{2}R(25T-5T)=50nRT=50PV$$

$$C \rightarrow D \text{ では、 } Q_3=nC_v\Delta T=n\frac{3}{2}R(5T-25T)=-30nRT=-30PV$$

$$D \rightarrow A \text{ では、 } Q_4=nC_p\Delta T=n\frac{5}{2}R(5T-T)=-10nRT=-10PV$$

- (8) 1 サイクルで外部から Q_1 と Q_2 の熱量を得て、正味 W_2-W_4 の仕事をしたので、熱効率 e は、

$$e=\frac{W_2-W_4}{Q_1+Q_2}=\frac{16PV}{56PV}=\frac{2}{7}$$

□ ■ 物理的思考 ■ □

熱効率はまさに「効率」なので、外部から得た熱量に対して、正味どれだけ仕事ができただけを表したものである。ただし、ここで言う正味の仕事とは気体が行った仕事から気体がされた仕事を引いたものである。したがって、熱効率 e は、

$$e=\frac{\text{(気体が正味にした仕事)}}{\text{(気体が得た熱量)}}$$

で与えられる。また、1 サイクルで考えると、気体は元の状態に戻る所以内部エネルギーの変化は 0 となる。1 サイクルで気体が得た熱量を Q_{in} 、気体が放出した熱量を Q_{out} 、気体が正味にした仕事を W_r とし熱力学第一法則を立てると、

$$0=Q_{in}-Q_{out}-W_r \Leftrightarrow Q_{in}-Q_{out}=W_r$$

となる。これより、気体が正味にした仕事は気体が得た熱量と気体が放出した熱量の差となっている。これを用いると、熱効率 e は、

$$e=\frac{\text{(気体が正味にした仕事)}}{\text{(気体が得た熱量)}}=\frac{\text{(気体が得た熱量)}-\text{(気体が失った熱量)}}{\text{(気体が得た熱量)}}$$

とも表せる。

※ 1 サイクルで気体の得た熱量と気体が失った熱量の差額が気体が仕事にする仕事となるのは、エネルギーの収支から考えてもすぐに分かることである。簡単な例で言うと、100[J]の熱量を外部からもらい 50[J]の熱を外部に捨てると 50[J]のエネルギーが余っている。1 サイクルでは元にもどることが条件なのでこの余ったエネルギーも捨てないといけない。これが気体が行う仕事という形で外部に捨てられている。

2

- (1) 各状態での温度を T_B , T_C とし、ボイルシャルル則 ($\frac{PV}{T} = \text{一定}$) より、

$$\frac{PV}{T} = \frac{5PV}{T_B} = \frac{P \times 5V}{T_C}$$

これを式変形すると、

$$T_B = 5T, T_C = 5T$$

- (2) 体積変化が無いことから **気体のした仕事は 0** となる。

A → B の過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_1 の分だけ増えて、気体が仕事 W_1 した分だけ疲れて減るので、

$$\Delta U = Q_1 - W_1$$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと体積変化が無いことから気体のした仕事が **0** と

なることより、

$$\frac{3}{2}nR(5T - T) = Q_1 - 0 \Leftrightarrow Q_1 = 6nRT$$

状態 A について、状態方程式 ($PV = nRT$) より、

$$PV = nRT \dots \textcircled{1}$$

以上より、

$$Q_1 = 6PV \text{ (吸収)}$$

(別解)

A → B で気体が得た熱量は定積モル比熱 $C_V = \frac{3}{2}R$ を用いて、

$$nC_V(5T - T) = 6nRT = 6PV$$

- (3) 圧力が一定ではないため ($W = p\Delta V$) が使えない。また、グラフの面積も求められそうにない。ここでは、B → C の変化で気体が得た熱量が Q と与えられているので、熱力学第一法則を用いる。

B → C の過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて、気体が仕事 W_2 した分だけ疲れて減るので、

$$\Delta U = Q - W_2$$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となることより、

$$\frac{3}{2}nR(5T - 5T) = Q - W_2 \Leftrightarrow W_2 = Q$$

- (4) 定圧変化なので、気体のした仕事 W_3 は ($W = p\Delta V$) より、

$$W_3 = P \times (5V - V) = 4PV$$

C → A の過程について、熱力学第一法則より、気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が失った熱量 Q_3 の分だけ減少し、気体がされた仕事 W_3 の分だけ増加するので、

$$\Delta U = -Q_3 + W_3$$

単原子分子理想気体なので、 $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと上記で求めた気体のした仕事より、

$$\frac{3}{2}nR(T - 5T) = -Q_3 + 4PV \Leftrightarrow Q_3 = 6nRT + 4PV$$

①式より、

$$Q_3 = 10PV \text{ (放出)}$$

(別解)

C → A で気体が得た熱量は定圧モル比熱 $C_P = \frac{5}{2}R$ を用いて、

$$nC_P(T - 5T) = -10nRT = -10PV \text{ (吸収)}$$

- (5) 1 サイクルで外部から Q_1 と Q の熱量を得て、正味 $W_2 - W_3$ の仕事をしたので、熱効率 e は、

$$e = \frac{W_2 - W_3}{Q_1 + Q} = \frac{Q - 4PV}{6PV + Q}$$

3

- (1) 各状態での温度を T_B, T_C, T_D として、ボイルシャルル則 ($\frac{PV}{T} = \text{一定}$) より、

$$\frac{PV}{T} = \frac{5PV}{T_B} = \frac{5P \times 5V}{T_C} = \frac{P \times 5V}{T_D}$$

これを式変形すると、

$$T_B = 5T, T_C = 25T, T_D = 5T$$

気体 1 [mol] を 1 [K] 上げるのに必要な熱量がモル比熱となることから、 $A \rightarrow B$ で気体が得た熱量は定積モル比熱 C_V を用いて、

$$nC_V(5T - T) = 4nC_VT$$

※ここでは単原子分子理想気体ではないので、定圧モル比熱 $C_P = \frac{5}{2}R$ と定積モル比熱 $C_V = \frac{3}{2}R$ 、および、

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T \text{ は使えないことに注意したい。}$$

- (2) $B \rightarrow C$ で気体が得た熱量は定圧モル比熱 C_P を用いて、
 $nC_P(25T - 5T) = 20nC_PT$

- (3) $C \rightarrow D$ で気体が得た熱量は定積モル比熱 C_V を用いて、
 $nC_V(5T - 25T) = -20nC_VT$
 したがって、失った熱量は $20nC_VT$ となる。

- (4) $D \rightarrow A$ で気体が得た熱量は定圧モル比熱 C_P を用いて、
 $nC_P(T - 5T) = -4nC_PT$
 したがって、失った熱量は $4nC_PT$ となる。

- (5) 1 サイクルで外部から (1) と (2) で求めた熱量を得て、(3) と (4) で求めた熱量を失うので、熱効率 e は、

$$e = \frac{(1)+(2)-(3)-(4)}{(1)+(2)} = \frac{4C_V + 20C_P - 20C_V - 4C_P}{4C_V + 20C_P} = \frac{4(C_P - C_V)}{C_V + 5C_P}$$

(別解)

(p - V) 図の面積から、1 サイクルで気体がした仕事は $B \rightarrow C$ で $20PV$ 、気体がされた仕事は $D \rightarrow A$ で $4PV$ となっている。したがって、気体のした正味の仕事は $16PV$ と分かる (1 サイクルが囲む面積に等しい)。1 サイクルで得た熱量と気体のした正味の仕事から熱効率 e は、

$$e = \frac{16PV}{4nC_VT + 20nC_PT}$$

状態方程式 ($PV = nRT$) より、 $PV = nRT$ と表せることから、

$$e = \frac{4nRT}{nC_VT + 5nC_PT} = \frac{4R}{C_V + 5C_P}$$

これは上で求めた式と値が異なるが、マイヤーの関係式 ($C_P - C_V = R$) を使うと同じ値になる。

4

問 1

- (1) 状態方程式 ($PV = nRT$) より、

$$T_A = \frac{p_1V_1}{nR}, T_B = \frac{3p_1V_1}{nR}, T_C = \frac{15p_1V_1}{nR}$$

- (2) 温度が上がっていると気体は熱量を得て、温度が下がると気体は熱量を失っているので、
 $A \rightarrow B$: (ア), $B \rightarrow C$: (ア), $C \rightarrow A$: (イ)

(3) A→Bでは定積変化なので定積モル比熱 $C_V=\frac{3}{2}R$ を用いて,

$$n\left(\frac{3}{2}R\right)\left(\frac{3p_1V_1}{nR}-\frac{p_1V_1}{nR}\right)=3p_1V_1 \text{ (吸収)}$$

B→Cでは定圧変化なので定圧モル比熱 $C_P=\frac{5}{2}R$ を用いて,

$$n\left(\frac{5}{2}R\right)\left(\frac{15p_1V_1}{nR}-\frac{3p_1V_1}{nR}\right)=30p_1V_1 \text{ (吸収)}$$

C→Aについてはモル比熱が与えられていない(定圧変化でも定積変化でもない)ので, 熱力学第一法則を用いる。単原子分子理想気体なので $\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ より,

$$\Delta U=\frac{3}{2}nR\left(\frac{p_1V_1}{nR}-\frac{15p_1V_1}{nR}\right)=-21p_1V_1$$

また, 気体がされた仕事 W は $(p-V)$ 図の面積から,

$$W=\frac{1}{2}(p_1+3p_1)4V_1=8p_1V_1$$

熱力学第一法則より, 気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が失った熱量 Q の分だけ減少し, 気体がされた仕事 W の分だけ増加するので,

$$\Delta U=-Q+W$$

求めた値を代入すると,

$$Q=29p_1V_1 \text{ (放出)}$$

(4) $(p-V)$ 図の1サイクルで囲む面積に等しくなるので,

$$\frac{1}{2}2p_1 \times 4V_1=4p_1V_1$$

問2 状態Dの温度 T_D は, 状態方程式 ($PV=nRT$) より,

$$T_D=\frac{5p_1V_1}{nR}$$

したがって, 熱量を得ている(温度が上がっている)過程はA→Cだけである。単原子分子理想気体なので $\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ より,

$$\Delta U=\frac{3}{2}nR\left(\frac{15p_1V_1}{nR}-\frac{p_1V_1}{nR}\right)=21p_1V_1$$

また, 気体がした仕事 W は $(p-V)$ 図の面積から,

$$W=\frac{1}{2}(p_1+3p_1)4V_1=8p_1V_1$$

熱力学第一法則より, 気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増加し, 気体がした仕事 W の分だけ疲れて減少するので,

$$\Delta U=Q-W$$

求めた値を代入すると,

$$Q=29p_1V_1 \text{ (吸収)}$$

問3 状態Eと状態Fの温度をそれぞれ T_E , T_F とすると, 状態方程式 ($PV=nRT$) より,

$$T_E=\frac{9p_1V_1}{nR}, T_F=\frac{3p_1V_1}{nR}$$

したがって, 熱量を得ている(温度が上がっている)過程はA→BとB→Eだけである。A→Bでは定積変化なので定積モル比熱 $C_V=\frac{3}{2}R$ を用いて,

$$n\left(\frac{3}{2}R\right)\left(\frac{3p_1V_1}{nR}-\frac{p_1V_1}{nR}\right)=3p_1V_1$$

B→Cでは定圧変化なので定圧モル比熱 $C_p = \frac{5}{2}R$ を用いて,

$$n\left(\frac{5}{2}R\right)\left(\frac{9p_1V_1}{nR} - \frac{3p_1V_1}{nR}\right) = 15p_1V_1$$

したがって、外部から吸収した熱量は $18p_1V_1$ である。

問4 1サイクルでの気体のした正味の仕事は($p-V$)図の1サイクルで囲む面積に等しくなっており、(図1)～(図3)のいずれにおいても正味の仕事は等しくなっている。したがって、熱効率の大小関係は1サイクルで気体が得た熱量で決まってくる。各サイクルで気体が得た熱量は、

(図1) : $33p_1V_1$

(図2) : $29p_1V_1$

(図3) : $18p_1V_1$

これより、 $e_3 > e_2 > e_1$ となる。

5

(1) 求める温度を T_1 として、状態方程式($PV=nRT$)より、

$$p_0SL = 1RT_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{p_0SL}{R} \dots \textcircled{1}$$

(2) 右図のような力が働くので、力のつり合いより、

$$p_1S = p_0S + Mg \Leftrightarrow p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} \dots \textcircled{2}$$

(3) 圧力がなくなったときの温度を T_1' として、状態方程式($PV=nRT$)より、

$$p_1SL = 1RT_1' \Leftrightarrow T_1' = \frac{p_1SL}{R} \dots \textcircled{3}$$

定積変化なので定積モル比熱 $C_v = \frac{3}{2}R$ を用いて、

$$1 \times \frac{3}{2}R \times (T_1' - T_1)$$

①～③式より、

$$1 \times \frac{3}{2}R \times (T_1' - T_1) = \frac{3}{2}(p_1 - p_0)SL = \frac{3}{2}MgL$$

(4) 求める温度を T_2 として、状態方程式($PV=nRT$)より、

$$p_1 \times 2SL = 1RT_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{2p_1SL}{R} = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right) \frac{2SL}{R} = \frac{2(p_0S + Mg)L}{R}$$

(5) ピストンはゆっくりと運動しているので、ピストンに働く力はつりあっていると考えられるので、ここでの過程は定圧変化だと考えられる。定圧モル比熱 $C_p = \frac{5}{2}R$ を用いて、

$$1 \times \frac{5}{2}R \times (T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\{(2p_0 - p_1)SL + 2MgL\}$$

②式より、

$$\frac{5}{2}(p_0S + Mg)L$$

(6) 状態2から状態3は定積変化、状態3から状態4は定圧変化であることに注意して、

(7) 気体が得た熱量が(3)と(5)から、気体のした正味の仕事は(4)のグラフが囲む面積が出せるので、熱効率 e は、

$$e = \frac{(p_1 - p_0)SL}{(3)+(5)} = \frac{MgL}{\frac{5}{2}p_0SL + 4MgL} = \frac{2Mg}{5p_0S + 8Mg}$$

