物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.16
内部エネルギーと比熱編
ブツリヨキワメヨ

1

□■物理的思考■□
　気体がする仕事（気体がピストンを押す仕事）は力学で学んだ時と同じようにして（力）×（距離）より求めることができる。圧力 $\boldsymbol{P}$ は力 $\boldsymbol{f}$ を面積 $\boldsymbol{S}$ で割ったものなので，

$$P=\frac{f}{S}$$

となる。これより，ピストンに働く力が $\boldsymbol{f=PS}$ と求まる。ピストンを距離 $\boldsymbol{x}$ だけ動かしたときの気体がした仕事 $\boldsymbol{W}$ は，（力）×（距離）より，

$$W=(PS)\times x=PSx$$

ここで，$\boldsymbol{Sx}$ が体積変化 $\boldsymbol{\Delta V}$ となるので，

$$W=P\Delta V$$

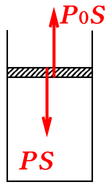
と求まる。
※ただし，この式は圧力が一定のもとでしか成り立っていない。圧力が一定でない場合は力も一定とならないため，仕事の公式の（力）×（距離）の（力）の値が分からなくなる。このときは，$(\boldsymbol{p-V})$図の縦軸が圧力 $\boldsymbol{P}$，横軸が体積変化 $\boldsymbol{\Delta V}$ となっていることから，$(\boldsymbol{p-V})$図の囲む面積が気体のした仕事に等しくなっていることを用いればよい。

(1)　ピストンに働く力のつり合いから，容器内の気体の圧力 $\boldsymbol{P}$ は，

$PS=P_0S \Leftrightarrow P=P_0$ [Pa]

気体がした仕事は（$W=p\Delta V$）より，

$W=P_0\Delta V$

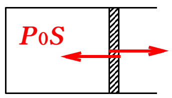


(2)　ピストンに働く力のつり合いから，容器内の気体の圧力 $\boldsymbol{P}$ は，

$PS=P_0S \Leftrightarrow P=P_0$ [Pa]

気体がした仕事は（$W=p\Delta V$）より，

$W=P_0\Delta V$

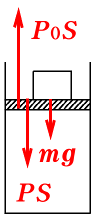


(3)　ピストンに働く力のつり合いから，容器内の気体の圧力 $\boldsymbol{P}$ は，

$$PS=P_0S+mg \Leftrightarrow P=P_0+\frac{mg}{S}$$

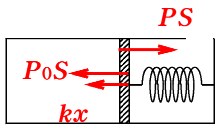
気体がした仕事は（$W=p\Delta V$）より，

$$W=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\Delta V$$



(4)　ピストンに働く力のつり合いから，ばねの縮みが $\boldsymbol{x}$ における気体の圧力 $\boldsymbol{P}$ は，

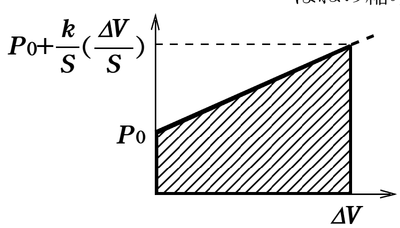
$$PS=P_0S+kx \Leftrightarrow P=P_0+\frac{kx}{S}$$



ばねの縮み$\boldsymbol{x}$

圧力が一定ではないので気体がする仕事は（$W=p\Delta V$）からは計算できない。してがって，（$p-V$）図の面積から求める。グラフを描くと次のようになるので，グラフが囲む面積は，

$$P_0\Delta V+\frac{1}{2}k\left(\frac{\Delta V}{S}\right)^2$$



2

□■物理的思考■□

気体の内部エネルギーとは気体のエネルギーのことである。では，気体の内部エネルギー U はどのような場合に変化するのかを考えてみよう。気体が外部に仕事 W をすれば，気体は（仕事をして疲れて）エネルギーを減らす。気体が熱量 Q をもらえば，その分だけエネルギーを増やす。したがって，気体が熱量 Q を得て，W の仕事を外部にすれば，内部エネルギーの変化 ΔU は，

$$\Delta U=Q-W$$

となる。気体が熱量 Q を得て，外部から W の仕事をされれば，内部エネルギーの変化 ΔU は，

$$\Delta U=Q+W$$

となる。ここでは，気体が外部から仕事をされる，つまり，外から押されると，押されて（運動）エネルギーが増えると考えればよい。このようにして考えると，熱力学第一法則は覚えるべき式ではなく，単なるエネルギー収支だと考えるだけでよくなる。

(1)　気体の内部エネルギー ΔU は熱量 Q をもらって増えて，仕事 W をして疲れて減るので $\Delta U=Q-W$ となる。

(2)　気体の内部エネルギー ΔU は熱量 Q をもらって増えて，仕事 W をされて（押されて）増えるので $\Delta U=Q+W$ となる。

(3)　気体の内部エネルギー ΔU は熱量 Q を失って減って，仕事 W をして疲れて減るので $\Delta U=-Q-W$ となる。

(4)　気体の内部エネルギー ΔU は熱量 Q を失って減って，仕事 W をされて（押されて）増えるので $\Delta U=-Q+W$ となる。

3

(1)　圧力が一定なので，($W=p\Delta V$) より，

PSx

(2)　求める温度を T' として，ボイルシャルル則（$\dfrac{PV}{T}$=一定）より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{P(V+Sx)}{T'}\Leftrightarrow T'=\frac{V+Sx}{V}T$$

(3)　状態変化前と変化後について，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$PV=nRT$

$P(V+\Delta V)=nR(T+\Delta T)$

辺々引くと，

$P\Delta V=nR\Delta T$

(4)　熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて，気体が仕事 W した分だけ疲れて減るので，

$\Delta U=Q-W$

単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となることと (1) より，

$$\frac{3}{2}nR\Delta T=Q-PSx=Q-P\Delta V$$

(3) で求めた式を用いて変形すると，

$$Q=\frac{5}{2}nR\Delta T$$

(5)　モル比熱 C は気体 1[mol]を 1[K]上げるのに必要な熱量なので，

$$C=\frac{\frac{5}{2}nR\Delta T}{n\Delta T}=\frac{5}{2}R$$

※これを定圧モル比熱と言い，C_p で表す。

□■物理的思考■□
　気体のモル比熱は一般に $Q=nC\Delta T$ で与えられる。これが公式となるので覚えてしまえば済むのだが，できれば定義からしっかりと覚えて欲しい。モル比熱の定義は気体 1[mol]を 1[K]上げるのに必要な熱量なので，このときの熱量が C となる。n[mol]で n 倍，ΔT[K]で ΔT 倍となり，$Q=nC\Delta T$ が与えられる。

4

(1)　体積変化はないので仕事ができない。よって，0 となる。

(2)　求める圧力を P'として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}$=一定）より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{P'V}{T+\Delta T}\Leftrightarrow P'=\frac{T+\Delta T}{T}P$$

(3)　圧力の式（$P=\frac{F}{S}$）から，気体が押す力は，

状態変化前：PS

状態変化後：$P'S=\frac{T+\Delta T}{T}PS=(1+\frac{\Delta T}{T})PS$

気体が押す力の増加分だけ力を加えればピストンは動かないので，

$$\frac{\Delta T}{T}PS$$

(4)　熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて，気体が仕事 W した分だけ疲れて減るので，

$\Delta U=Q-W$

単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと(1)より，

$$Q=\frac{3}{2}nR\Delta T$$

(5)　モル比熱 C は気体 1[mol]を 1[K]上げるのに必要な熱量なので，

$$C=\frac{\frac{3}{2}nR\Delta T}{n\Delta T}=\frac{3}{2}R$$

※これを定積モル比熱と言い，C_V で表す。

5

(1)　圧力を P に保ったままとあるので，$P\Delta V=nR\Delta T$ が成り立っている。
※ 3(3)で確認済み。
したがって，気体のした仕事 W は（$W=p\Delta V$）より，
$W=P\Delta V=nR\Delta T$

(2)　モル比熱の定義より得た熱量 Q は $Q=nC_p\Delta T$ となる。

(3)　熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて，気体が仕事 W した分だけ疲れて減るので，

$\Delta U = Q - W$

これと(1)および(2)で求めた答えより，

$\Delta U = nC_p\Delta T - nR\Delta T$

(4)　体積変化はないので仕事ができない。よって，0 となる。

(5)　モル比熱の定義より得た熱量 Q' は $Q = nC_V\Delta T$ となる。

(6)　熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q' の分だけ増えて，気体が仕事 W' した分だけ疲れて減るので，

$\Delta U = Q' - W'$

これと(4)および(5)で求めた答えより，

$\Delta U = nC_V\Delta T$

(7)　同じ気体を同じ温度だけ上げているので内部エネルギーの変化は等しいので，(3)と(6)で求めた答えは等しくなる。これより，

$$nC_p\Delta T - \frac{3}{2}nR\Delta T = nC_V\Delta T \Leftrightarrow C_p - C_V = R$$

※この関係をマイヤーの関係という。

□■物理的思考■□

今回の問題では $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ を使っていない。これが使えるのは，単原子分子理想気体の時だけであることに注意したい。今回は理想気体としか与えられていない。マイヤーの関係はこの条件のもとで証明できたので，単原子分子理想気体のしばりが無くても成り立っている。

6

(1)　$1 \gg x$（x が 1 に比べて十分小さいとき）に成り立つ関係式（$(1+x)^n = 1+nx$）より，$\frac{c}{a}$ が x に相当するので，

$$1 + \frac{2c}{a}$$

(2)　同様に考えて，

$$1 + \frac{c}{2a}$$

(3)　同様に考えて，

$$\sqrt{1+\frac{c}{a}} = \left\{1+\frac{c}{a}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{c}{2a}$$

7

(1)　ポアソンの式（PV^{γ}=一定）より，求める圧力を P' とおくと，

$$PV^{\gamma} = P'(V+\Delta V)^{\gamma} \Leftrightarrow P' = P\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^{\gamma}$$

(2)　求める温度を T' として，状態方程式（$PV=nRT$）より，

変化後：$P'(V+\Delta V)=nRT'$

変化前：$PV=nRT$

辺々割ると，

$$\frac{P'(V+\Delta V)}{PV}=\frac{T'}{T}\Leftrightarrow T'=\frac{P'}{P}\times\frac{V+\Delta V}{V}\times T$$

(1) で求めた答えを用いて式変形すると，

$$T'=T\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^{\gamma-1}$$

(3)　$\Delta V=Sx$ とおけるので，(1) で求めた答えより，

$$P'=\left(\frac{V}{V+Sx}\right)^{\gamma}$$

(4)　(3) で求めた答えを式変形すると，

$$P'=\left(\frac{V}{V+Sx}\right)^{\gamma}=\left(1+\frac{Sx}{V}\right)^{-\gamma}$$

体積は微小増加なので $\frac{Sx}{V}\ll 1$ と考えると，近似式（$(1+x)^n=1+nx$）より，

$$P'=\left(1+\frac{Sx}{V}\right)^{-\gamma}=1-\frac{\gamma Sx}{V}$$

よって，圧力の変化量 ΔP は，

$$\Delta P=P'-P=-\frac{\gamma S}{V}x$$

□■物理的思考■□

ポアソンの式は（$PV^{\gamma}=$一定）で与えられるが，状態方程式（$PV=nRT$）を用いて変形すると，

一定$=PV\times V^{\gamma-1}=nRT\times V^{\gamma-1}=nR\times TV^{\gamma-1}$

同一の気体であれば物質量 n は一定で，気体定数 R も気体に依らず一定なので，

$$TV^{\gamma-1}=\text{一定}$$

となる。(2) はこれを用いて解答しても構わない。

8

(1)　各状態での温度を T_B，T_C，T_D として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}=$一定）より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{5PV}{T_B}=\frac{5P\times 5V}{T_C}=\frac{P\times 5V}{T_D}$$

これを式変形すると，

$T_B=5T$，$T_C=25T$，$T_D=5T$

(2)　体積が増加するときが気体が外部に仕事をするときなので，B→C となる。

(3)　定圧変化なので，気体のした仕事 W は（$W=p\Delta V$）より，

$5P\times(5V-V)=20PV$

(4)　体積が減少するときが気体が外部から仕事をされるときなので，D→A となる。

(5)　定圧変化なので，気体がされた仕事 W は（$W=p\Delta V$）より，
$P\times(5V-V)=4PV$

(6)　A→Bの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_1 の分だけ増えて，気体が仕事 W_1 した分だけ疲れて減るので，
$\Delta U=Q_1-W_1$
単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となることと体積変化が無いことから気体のした仕事が 0 となることより，
$\dfrac{3}{2}nR(5T-T)=Q_1-0\Leftrightarrow Q_1=6nRT$
状態Aについて，状態方程式（$PV=nRT$）より，
$PV=nRT$…①
以上より，
$Q_1=6PV$（吸収）

B→Cの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_2 の分だけ増えて，気体が仕事 W_2 した分だけ疲れて減るので，
$\Delta U=Q_2-W_2$
単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となることと(3)で求めた気体のした仕事より，
$\dfrac{3}{2}nR(25T-5T)=Q_2-20PV\Leftrightarrow Q_2=30nRT+20PV$
これと①式より，
$Q_2=50PV$（吸収）

C→Dの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_3 の分だけ増えて，気体が仕事 W_3 した分だけ疲れて減るので，
$\Delta U=Q_3-W_3$
単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となることと体積変化が無いことから気体のした仕事が 0 となることより，
$\dfrac{3}{2}nR(5T-25T)=Q_3-0\Leftrightarrow Q_1=-30nRT$
これと①式より，
$Q_3=-30PV$（吸収）
したがって，$30PV$ 放出したことになる。

D→Aの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_4 の分だけ増えて，気体が仕事 W_4 された分だけ増えるので，
$\Delta U=Q_4+W_4$
単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となることと(5)で求めた気体のした仕事より，
$\dfrac{3}{2}nR(T-5T)=Q_4+4PV\Leftrightarrow Q_4=-6nRT-4PV$
これと①式より，
$Q_2=-10PV$（吸収）
したがって，$10PV$ 放出したことになる。
まとめると，
A→Bでは $6PV$ 吸収，B→Cでは $50PV$ 吸収，C→Dでは $30PV$ 放出，D→Aでは $10PV$ 放出している。

（別解）

単原子分子理想気体の定圧モル比熱$C_p=\frac{5}{2}R$と定積モル比熱$C_V=\frac{3}{2}R$を用いると，モル比熱は気体 1[mol]を 1[K]上げるのに必要な熱量なので，

A→Bでは，$Q_1=nC_V\Delta T=n\frac{3}{2}R(5T-T)=6nRT=6PV$（∵①式）

B→Cでは，$Q_2=nC_p\Delta T=n\frac{5}{2}R(25T-5T)=50nRT=50PV$

C→Dでは，$Q_3=nC_V\Delta T=n\frac{3}{2}R(5T-25T)=-30nRT=-30PV$

D→Aでは，$Q_4=nC_p\Delta T=n\frac{5}{2}R(5T-T)=-10nRT=-10PV$

□■物理的思考■□
内部エネルギーの変化 ΔU は変化量を聞いているので，ΔT については，（変化後）－（変化前）で出しているため，C→DやD→Aの過程では ΔU が負の値になっている。一方で，気体の仕事については，仕事をするときとされるときが明らかなので，どちらも正となるようにしているため，（$W=p\Delta V$）の ΔV については，正の値になるようにして考えている。

9

(1)　各状態での温度を T_B，T_C，T_D として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}$=一定）より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{5PV}{T_B}=\frac{5P\times 5V}{T_C}=\frac{P\times 5V}{T_D}$$

これを式変形すると，
$T_B=5T$，$T_C=25T$，$T_D=5T$
気体 1[mol]を 1[K]上げるのに必要な熱量がモル比熱となることから，A→Bで気体が得た熱量は定積モル比熱C_Vを用いて，
$nC_V(5T-T)=4nC_VT$
※ここでは単原子分子理想気体ではないので，定圧モル比熱$C_p=\frac{5}{2}R$と定積モル比熱$C_V=\frac{3}{2}R$，および，$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$は使えないことに注意したい。

(2)　B→Cで気体が得た熱量は定圧モル比熱C_pを用いて，
$nC_p(25T-5T)=20nC_pT$

(3)　C→Dで気体が得た熱量は定積モル比熱C_Vを用いて，
$nC_V(5T-25T)=-20nC_VT$

(4)　D→Aで気体が得た熱量は定圧モル比熱C_pを用いて，
$nC_p(T-5T)=-4nC_pT$

10

(1)　各状態での温度を T_B，T_C として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}$=一定）より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{5PV}{T_B}=\frac{P\times 5V}{T_C}$$

これを式変形すると，

$T_B=5T$，$T_C=5T$

(2)　体積変化が無いことから気体のした仕事は 0 となる。

Ａ→Ｂの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q_1 の分だけ増えて，気体が仕事 W_1 した分だけ疲れて減るので，

$\Delta U=Q_1-W_1$

単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと体積変化が無いことから気体のした仕事が 0 となることより，

$$\frac{3}{2}nR(5T-T)=Q_1-0\Leftrightarrow Q_1=6nRT$$

状態Ａについて，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$PV=nRT$…①

以上より，

$Q_1=6PV$（吸収）

（別解）

Ａ→Ｂで気体が得た熱量は定積モル比熱 $C_V=\frac{3}{2}R$ を用いて，

$nC_V(5T-T)=6nRT=6PV$

(3)　圧力が一定ではないため（$W=p\Delta V$）が使えない。また，グラフの面積も求められそうにない。ここでは，Ｂ→Ｃの変化で気体が得た熱量が Q と与えられているので，熱力学第一法則を用いる。

Ｂ→Ｃの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて，気体が仕事 W_2 した分だけ疲れて減るので，

$\Delta U=Q-W_2$

単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ となることより，

$$\frac{3}{2}nR(5T-5T)=Q-W_2\Leftrightarrow W_2=Q$$

(4)　定圧変化なので，気体のした仕事 W_3 は（$W=p\Delta V$）より，

$W_3=P\times(5V-V)=4PV$

Ｃ→Ａの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が失った熱量 Q_3 の分だけ減少し，気体がされた仕事 W_3 の分だけ増加するので，

$\Delta U=-Q_3+W_3$

単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ となることと上記で求めた気体のした仕事より，

$$\frac{3}{2}nR(T-5T)=-Q_3+4PV\Leftrightarrow Q_3=6nRT+4PV$$

①式より，

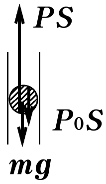
$Q_3=10PV$（放出）

（別解）

Ｃ→Ａで気体が得た熱量は定圧モル比熱 $C_p=\frac{5}{2}R$ を用いて，

$nC_p(T-5T)=-10nRT=-10PV$（吸収）

11



(1)　図のような金属球に働く力のつり合いより，

$PS=P_0S+mg \Leftrightarrow mg=(P-P_0)S$

(2)　金属球が位置 $x=x$ にあるとき，容器内の気体の体積は $V+Sx$ となっている。また，容器は断熱材で囲まれ外部との気体のやりとりが無いので断熱変化である。したがって，断熱変化において成り立つポアソンの式（$PV^{\gamma}=$一定）より，

$$PV^{\gamma}=P'(V+Sx)^{\gamma} \Leftrightarrow P'=P\left(\frac{V}{V+Sx}\right)^{\gamma} \Leftrightarrow P'=P\left(1+\frac{Sx}{V}\right)^{-\gamma}$$

$\frac{Sx}{V}$ が微笑量となるので，微小量 x について成り立つ近似式（$(1+x)^n=1+nx$）より，

$$P'=P(1-\frac{\gamma Sx}{V})$$

ピストンに働く合力は x 軸方向を正とすると，

$$P'S-P_0S-mg=P(1-\frac{\gamma Sx}{V})S-P_0S-mg$$

これを(1)で求めた関係式から，合力は，

$$-\frac{\gamma PS^2}{V}x$$

(3)　運動方程式（$ma=f$）より，

$$ma=-\frac{\gamma PS^2}{V}x \Leftrightarrow a=-\frac{\gamma PS^2}{mV}x$$

(4)　単振動の加速度が $a=-\omega^2 x$ と表せることから，

$$\omega^2=\frac{\gamma PS^2}{mV} \Leftrightarrow \omega=\sqrt{\frac{\gamma PS^2}{mV}}$$

(5)　周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma PS^2}}$$

(6)　(5)で求めた式を変形すると，

$$T^2=4\pi^2\frac{mV}{\gamma PS^2} \Leftrightarrow \gamma=\frac{4\pi^2 mV}{PS^2T^2}$$

12

(1)　求める温度を T_A として，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$PV=nRT_A \Leftrightarrow T_A=\frac{PV}{nR}$$

(2)　求める温度を T_B として，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$2P\times 2V=nRT_B \Leftrightarrow T_B=\frac{4PV}{nR}$$

(3)　単原子分子理想気体なので，$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ より，

$$\frac{3}{2}nR(\frac{4PV}{nR}-\frac{PV}{nR})=\frac{9}{2}PV$$

(4)　圧力が一定ではないので気体がする仕事は（$W=p\Delta V$）からは計算できない。してがって，（p−V）図の面積から求める。台形の面積より，

$$\frac{1}{2}(2P+P)V=\frac{3}{2}PV$$

(5)　A→Bの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて，気体が仕事 W した分だけ疲れて減るので，

$$\Delta U=Q-W$$

$$\frac{9}{2}PV=Q-\frac{3}{2}PV \Leftrightarrow Q=6PV$$

(6)　求めるモル比熱を C とおくと，気体が得た熱量 Q は，

$$Q=nC\left(\frac{4PV}{nR}-\frac{PV}{nR}\right)=\frac{3CPV}{R}$$

これが(5)と等しくなるので，

$$\frac{3CPV}{R}=6PV \Leftrightarrow C=2R$$

13

(1)　求める圧力を P として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}$=一定）より，

$$\frac{P_0V_0}{T_0}=\frac{PV_0}{T} \Leftrightarrow P=\frac{T}{T_0}P_0$$

(2)　A→Bの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 ΔU は気体が得た熱量 Q の分だけ増えて，気体が仕事 W した分だけ疲れて減るので，

$$\Delta U=Q-W$$

体積変化が無いことから気体のした仕事が 0 となるので，

$$\Delta U=Q$$

(3)　単原子分子理想気体ではないので $\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ が使えない。内部エネルギー U が温度 T に比例することから，比例定数を k とおくと，

$$U=kT \Leftrightarrow \Delta U=k\Delta T$$

とおける。したがって，

A→B：$\Delta U=k(T-T_0)=Q$…①

A→C：$\Delta U'=k(T_1-T_0)$…②

①式から k を求め，②式に代入すると，

$$\Delta U'=\frac{T_1-T_0}{T-T_0}Q$$

(4)　**1** (4)のようにグラフを描いて面積から求めることもできるが，ここでは違う方法で解いていく。ピストン内の気体がピストンを介して誰に仕事をしているかというと，大気とばねである。大気圧はばねが自然長の時なので，状態Aの圧力 P_0 と等しくなっている。大気を押す力は大気圧が一定なので，P_0S の一定の力で押せばよい。ばねを押す力はばねの縮みによって変わるが，結局は弾性エネルギーとして蓄えられる。これより，

（気体のした仕事）＝（大気に対してした仕事）＋（ばねに対してした仕事）

　　　　　　　　　＝ P_0Sl ＋（弾性エネルギー）

となっている。したがって，

$$W'=P_0Sl+\frac{1}{2}kl^2$$

(5)　A→Cの過程について，熱力学第一法則より，気体の内部エネルギーの変化 $\Delta U'$ は気体が得た熱量 Q' の分だけ増えて，気体が仕事 W' した分だけ疲れて減るので，

$$\Delta U'=Q'-W'$$

(3)と(4)で求めた値を代入すると，

$$Q'=\frac{T_1-T_0}{T-T_0}Q+P_0Sl+\frac{1}{2}kl^2$$

14

(1)　求める物質量を n とすると，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$n=\frac{3PV}{RT}$$

(2)　容器Ａと容器Ｂには同じ物質量が入っているので，求める圧力を P_B として，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$P_B 3V=\left(\frac{3PV}{RT}\right)R(2T)\Leftrightarrow P_B=2P$$

(3)　容器ＡとＢ内の気体が混ざり合うので, ボイルシャルル則は利用できない(□■物理的思考■□を参考)。容器が断熱材で囲まれているので，気体Ａが気体Ｂから得た熱量 Q と気体Ｂが気体Ａに与えた熱量は等しい。また，気体Ａが気体Ｂにした仕事 W と気体Ｂが気体Ａにされた仕事も等しくなっている。それぞれの気体について熱力学第一法則を立てると，

気体Ａ：$\Delta U=Q-W$（熱量 Q を気体Ｂから得て，気体Ｂに W の仕事をしているので）

気体Ｂ：$\Delta U'=-Q+W$（熱量 Q を気体Ａに放出し，気体Ａから W の仕事をされたので）

辺々を足すと，

$$\Delta U+\Delta U'=0$$

単原子分子理想気体なので $\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T$ が利用でき，また，求める温度を T' として，

$$\frac{3}{2}nR(T'-T)+\frac{3}{2}nR(T'-2T)=0\Leftrightarrow T'=\frac{3}{2}T$$

(4)　状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$P''(4V)=2nRT'$$

(1) と (3) の値を代入すると，

$$P''=\frac{9}{4}P$$

□■物理的思考■□

ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}$=一定）がどのような時に成り立っているかを考えてみよう。状態方程式（$PV=nRT$）を式変形すると，

$$\frac{PV}{T}=nR$$

となる。この式から考えると，$\frac{PV}{T}$ が一定となるのは，物質量 n が一定の時となる。したがって，同一の気体についてのみ成り立っている。今回の問題では気体が混ざり合っているために同一の気体とみなせない。このために，ボイルシャルル則が使えなくなっている。

15

(1)　容器内の気体が容器Ｂへと拡散するが，容器Ｂはもともと真空なので気体は仕事をする相手がいないので仕事が 0 となる。さらに，断熱性の容器なので断熱変化である。熱力学第一法則より，

$$\Delta U=0$$

となる。これより，温度変化が無いと分かるので気体の温度は T_1 となる。

求める圧力を P として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}$=一定）より，

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P(V_1+V_2)}{T_1}\Leftrightarrow P=\frac{V_1}{V_1+V_2}P_1$$

(2)　実在気体では分子間力がはたらくので，容器Ｂに拡散する気体が容器Ａに残っている気体に引っ張られる。気体はこの力に逆らって拡散するので，気体は仕事をしている。これを $W(>0)$とすれば，断熱変化であることを踏まえて熱力学第一法則より，

$$\Delta U=0-W=-W<0$$

したがって，温度変化も負となるので，(1) と比べて温度が低くなる。

16

問１　状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$p=\frac{nRT}{V}$$

問２　なめらかに動くピストンが静止しているので，ＡとＢの圧力は等しくなっている。これと問１より，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$n_{\mathrm{B}}=\frac{\left(\frac{nRT}{V}\right)V}{RT}=n$$

問３　単原子分子理想気体なので（$U=\frac{3}{2}nRT$）が利用できるので，

$$U_0=\frac{3}{2}n_BRT+\frac{3}{2}n_CR(2T)=\frac{3}{2}n_BRT+3n_CRT$$

問４　求める温度をT'として，ボイルシャルル則（$\frac{PV}{T}=$一定）より，

$$\frac{pV}{T}=\frac{4p\frac{V}{2}}{T'}\Leftrightarrow T'=2T$$

問５　容器ＢとＣの気体の温度をT''として，状態方程式（$PV=nRT$）より，

$$4p\left(\frac{5}{2}V\right)=(n_B+n_C)RT''$$

（$U=\frac{3}{2}nRT$）より，

$$U_1=\frac{3}{2}(n_B+n_C)RT''=15pV=15nRT$$ （∵問１）

問６　容器ＢとＣ内にある気体が容器Ａの気体に対して仕事 W をしているが，容器Ａ内にある気体は容器ＢとＣ内にある気体から同じ分の仕事 W をされている。また，断熱材で容器ができていることから断熱変化である。これらのことと熱力学第一法則を踏まえると，**14**(3)のように，気体全体の内部エネルギーの変化はない。したがって，コックを空ける前後での全気体の内部エネルギーが等しいことから，

$$\frac{3}{2}nRT+U_0=\frac{3}{2}nR(2T)+U_1$$

問２と問３および問５の結果から，

$$\frac{3}{2}nRT+\frac{3}{2}nRT+3n_CRT=3nRT+15nRT$$

これを整理すると，

$$n_C=5n$$