物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.12
万有引力編
ブツリヨキワメヨ

1

(1)　遠日点Qでの速さを v_Q として，面積速度一定の法則より，

$$\frac{1}{2}r_Qv_Q=\frac{1}{2}r_Pv_P \Leftrightarrow v_Q=\frac{r_P}{r_Q}v_P$$

(2)　ケプラーの第３法則（$T^2=ka^3$）より，ハレー彗星の公転周期を T' として，

地球：$T^2=kR^3$…①

ハレー彗星：$T'^2=k\left(\frac{r_P+r_Q}{2}\right)^3$…②

②式を①式で割ることより，

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2=\left(\frac{r_P+r_Q}{2R}\right)^3 \Leftrightarrow T'=T\sqrt{\left(\frac{r_P+r_Q}{2R}\right)^3}$$

2

(1)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）より，

$F=mr\omega^2$

(2)　（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$$F=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{4\pi^2mr}{T^2}$$

(3)　（$T^2=ka^3$）より，

$T^2=kr^3$

(4)　これを(2)で求めた式に代入して，

$$F=\frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$$

(5)　万有引（力）

3

(1)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）と，円運動の中心向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$F=m(R+h)\omega^2$

（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$$F=m(R+h)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

(2)　万有引力が向心力となっていることより，

$$F=\frac{GmM}{(R+h)^2}$$

※(1)と(2)は空欄補充形式になっているので仕方が無いが，中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）を立てることで

$$m(R+h)\omega^2=\frac{GmM}{(R+h)^2} \Leftrightarrow m(R+h)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{GmM}{(R+h)^2}$$

となるので，左辺が(1)の答え，右辺が(2)の答えとなっている。

(3)　(1) と (2) の答えが等しくなることから，

$$m(R+h)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{GmM}{(R+h)^2}\Leftrightarrow(R+h)^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}\Leftrightarrow h=\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}-R$$

(4)　地表面では重力と万有引力が等しいと考えられるので，

$$mg=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow GM=gR^2$$

(5)　(3) と (4) で求めた式より，

$$h=\left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}-R$$

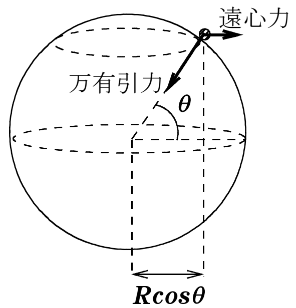
4

(1)　$\dfrac{GmM}{R^2}$

(2)　図より，$R\cos\theta$

(3)　同緯度にいる観測者から見ると慣性力が働く。円運動の加速度は中心向きで、この向きと反対向きに慣性力が働くので，円運動の加速度が（$a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）で与えられることと，（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，

$$m(R\cos\theta)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$



(4)　円運動の場合の慣性力を遠心（力）と言う。

5

(1)　第 1 宇宙速度は地表面すれすれを円運動しているので，円軌道の半径は R となる。円運動の加速度（$a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）と，円運動の中心向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$$m\frac{v_1^2}{R}=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(2)　第 2 宇宙速度は地球の引力圏から離れるとき，つまり，地球から無限遠の地点に到達する最小の速度である。無限遠での運動エネルギーを K とおくと，力学的エネルギー保存則（$K+U$=一定）より，

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM}{R}=K-\frac{GmM}{\infty}$$

ここで，右辺第 2 項が 0 と近似できることから，

$$K=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM}{R}$$

無限遠の点に到達するためには，無限遠で速度を持てばよいので，つまり，$K \geqq 0$ となることから，最小の速度は，

$$v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

(3)　地表面において万有引力と重力が等しくなることから，

$$mg=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow GM=gR^2$$

これを (1) で求めた式に代入すると，

$v_2=\sqrt{gR}=\sqrt{\times\ 9.8\times\ 80^2\times\ 10^3}=800\times\ \sqrt{2\times\ 7^2}=7.9\times\ 10^3$ [m/s]

これを (2) で求めた式に代入すると，

$v_2=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times\ 9.8\times\ 80^2\times\ 10^3}=800\times\ \sqrt{2\times\ 2\times\ 7^2}=11.2\times\ 10^3$ [m/s]

6

(1)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）と，円運動の中止向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GmM}{r^2}$$

(2)　(1)で求めた式を変形すると，

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(3)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{GmM}{R}\ \cdots①$$

(4)　面積速度一定の法則より，

$$\frac{1}{2}rv_1=\frac{1}{2}Rv_2\ \cdots②$$

(5)　②式より，

$$v_1=\frac{R}{r}v_2$$

これを①式に代入すると，

$$\frac{1}{2}m(\frac{R}{r}v_2)^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{GmM}{R}$$

両辺を m で割り，v_2 の 2 乗の項でくくると，

$$\frac{R^2-r^2}{2r^2}v_2{}^2=\frac{GM(R-r)}{rR}$$

$R^2-r^2=(R+r)(R-r)$ と因数分解できることを利用すると，

$$v_2=\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

(6)　ケプラーの第３法則（$T^2=ka^3$）より，円軌道と楕円軌道での公転周期をそれぞれ T，T'として，

円軌道：$T^2=kr^3\cdots①$

楕円軌道：$T'^2=k\left(\frac{R+r}{2}\right)^3\cdots②$

②式を①式で割ることより，

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2=\left(\frac{R+r}{2r}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{T'}{T}=\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

7

(1)　質量を体積で割ることから，

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3M}{4\pi R^3}$$

(2)　(1)で求めた密度と体積を掛けることから，

$$\frac{3M}{4\pi R^3}\times\frac{4\pi x^3}{3}=\frac{Mx^3}{R^3}$$

(3)　問題文中にある，$x=x$ の位置にある物体は図の斜線部分からしか万有引力を受けないので，代入する質量も(2)で求めたものとなる。したがって，

$$\frac{Gm(\frac{Mx^3}{R^3})}{x^2}=\frac{GmMx}{R^3}\ \cdots①$$

また，地表面において万有引力と重力が等しくなることから，

$$mg=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow GM=gR^2$$

これと①式より，万有引力の大きさは，

$$\frac{mgx}{R}$$

(4)　x 方向についての運動方程式（$ma=f$）より，

$$ma=-\frac{mg}{R}x$$

※右辺が$-x$ に比例しているので復元力となっている。すなわち単振動する。

(5)　単振動の加速度が$a=-\omega^2 x$と表せることから，

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

周期の式（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

$$2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(6)　(1)で求めた密度と体積を掛けることから，

$$\frac{3M}{4\pi R^3}\times\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{Mr^3}{R^3}$$

(7)　(3)と同様に考えると，

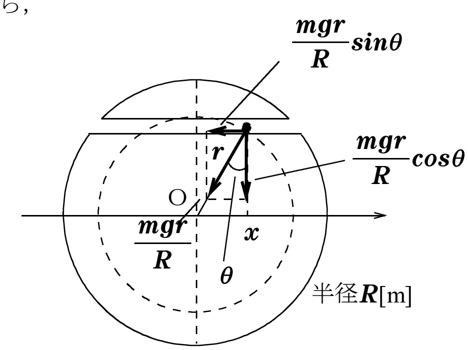
$$\frac{Gm(\frac{Mr^3}{R^3})}{r^2}=\frac{GmMr}{R^3}\ \cdots①$$

また，地表面において万有引力と重力が等しくなることから，

$$mg=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow GM=gR^2$$

これと①式より，万有引力の大きさは，

$$\frac{mgr}{R}$$



(8)　図のように角度 θ を決めると，(7)で求めた万有引力の x 成分は，

$$-\frac{mgr}{R}sin\theta$$

また，図より，

$$sin\theta=\frac{x}{r}$$

これらより，万有引力の x 成分は，

$$-\frac{mgr}{R}sin\theta=-\frac{mgx}{R}$$

したがって，x 方向についての運動方程式（$ma=f$）より，

$$ma'=-\frac{mg}{R}x$$

(9)　単振動の加速度が$a=-\omega^2x$と表せることから，

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

周期の式（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，

$$2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

8

問１　地表面において万有引力と重力が等しくなることから，

$$mg=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow g=\frac{GM}{R^2}$$

問２　地表面すれすれを円運動しているので，円軌道の半径は R となる。円運動の加速度（$a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）と，円運動の中心向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$$m\frac{v_0{}^2}{R}=\frac{GmM}{R^2}\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

問３　最高点では速さが 0 になるので，最高点の高さを h として，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2-\frac{GmM}{R}=0-\frac{GmM}{R+h}\Leftrightarrow\frac{GmM}{R+h}=\frac{GmM}{2R}\Leftrightarrow h=R$$

問４　地上に戻ってこないようにするには地球から無限遠の地点に到達すればよいので、無限遠での物体の運動エネルギーを K とおくと，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R}=K-\frac{GmM}{\infty}$$

ここで，右辺第２項が 0 と近似できることから，

$$K=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R}$$

無限遠の点に到達するためには，無限遠で速度を持てばよいので，つまり，$K\geqq 0$ となることから，最小の速度は，

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

問５　物体の速度を V として，円運動の加速度（$a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）と，円運動の中心向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$$m\frac{V^2}{kR}=\frac{GmM}{(kR)^2}$$

この式より，物体の運動エネルギー K は，

$$K=\frac{1}{2}mV^2=\frac{GmM}{2kR}$$

また，万有引力による位置エネルギー U は，

$$U=-\frac{GmM}{kR}$$

したがって，

$$\frac{K}{U}=-\frac{1}{2}$$

9

(1)　面積速度

(2)　$\dfrac{GmM}{r^2}$

(3)　周期の式（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$）より，$\dfrac{2\pi}{T}$ となる。

(4)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）より，$r(\dfrac{2\pi}{T})^2$ となる。

(5)　円運動の中心向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$$mr(\frac{2\pi}{T})^2=\frac{GmM}{r^2}\Leftrightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

(6)　円運動の速度（$v=r\omega$）より，運動エネルギー K は，

$$K=\frac{1}{2}m(r\omega)^2=\frac{1}{2}mr^2(\frac{2\pi}{T})^2=\frac{2\pi^2mr^2}{T^2}$$

(7)　(5)で求めた式を，(6)で求めた式に代入して，

$$K=\frac{GM}{2r}$$

(8)　$-\dfrac{GmM}{r}$

(9)　(7)と(8)の結果より，

$$K+U=-\frac{GmM}{2r}$$

10

問 1

(1)　$\dfrac{Gm_0M}{r^2}$

(2)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$）より，$\dfrac{v_0{}^2}{r}$ となる。

(3)　円運動の中心向きについての運動方程式（$ma=f$）より，

$$m_0\frac{v_0{}^2}{r}=\frac{Gm_0M}{r^2}\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\frac{GM}{r}}\cdots①$$

円運動の周期は，円周を速さで割ることより，

$$T_0=\frac{2\pi r}{v_0}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

(4)　(3)で求めた式の両辺を **2** 乗すると，

$$T_0{}^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=kr^3\Leftrightarrow k=\frac{4\pi^2}{GM}$$

問 2

(1)　A：$\dfrac{1}{2}mv_1{}^2-\dfrac{GmM}{R}$，B：$\dfrac{1}{2}mv_2{}^2-\dfrac{GmM}{r}$

(2)　面積速度一定の法則より，

$$\frac{1}{2}Rv_1=\frac{1}{2}rv_2\cdots②$$

(3)　力学的エネルギー保存則（$K+U$=一定）より，

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GmM}{R}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM}{r}\cdots③$$

②式より，

$$v_1=\frac{r}{R}v_2$$

これを③式に代入すると，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r}{R}v_2\right)^2-\frac{GmM}{R}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM}{r}$$

両辺を m で割り，v_2 の 2 乗の項でくくると，

$$\frac{r^2-R^2}{2R^2}v_2^2=\frac{GM(r-R)}{rR}$$

$r^2-R^2=(r+R)(r-R)$ と因数分解できることを利用すると，

$$v_2=\sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}}$$

(4)　ケプラーの第３法則（$T^2=ka^3$）より，

円軌道：$T_0^2=kr^3\cdots④$

楕円軌道：$T_1^2=k\left(\frac{R+r}{2}\right)^3\cdots⑤$

⑤式を④式で割ることより，

$$\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2=\left(\frac{R+r}{2r}\right)^3\Leftrightarrow\frac{T_1}{T_0}=\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

これと問１(4)の結果より，

$$T_1=\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{\frac{3}{2}}T_0=\pi\sqrt{\frac{(R+r)^3}{2GM}}$$

問３

(1)　宇宙ステーションは円軌道上を運動していてるので，円運動の周期から宇宙ステーションが点Ｂに到達する時間は，

$$\frac{\pi-\theta_0}{2\pi}T_0$$

また，補給船は楕円軌道を運動しており，点Ａから点Ｂに到達するまでは半周期後となるので，

$$\frac{T_1}{2}$$

宇宙ステーションと補給船が点Ｂで遭遇するので，

$$\frac{\pi-\theta_0}{2\pi}T_0=\frac{T_1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{\frac{3}{2}}T_0$$

$$\theta_0=\left\{1-\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\pi$$

(2)　問２の(3)で求めた式を変形すると，

$$v_2=\sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}}=\sqrt{\frac{2GM}{r}}\times\sqrt{\frac{R}{R+r}}$$

また，①式より，

$$v_2=v_1\times\sqrt{\frac{R}{R+r}}<v_0\Leftrightarrow v_2<v_0$$

補給船が宇宙ステーションと同じ円軌道上を運動するためには，進行方向の速さを大きくして，v_0 と同じにすればよい。