

物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.12
万有引力編

フツリヨキヨ

1 次の文章を読み、各問いに答えよ。

ハレー彗星が太陽を一つの焦点とした楕円軌道を実行している。太陽からの距離が r_p [km] の近日点 P を v_p [km/s] で通過し、その後、太陽からの距離が r_q [m] の遠日点 Q を通過した。また、地球は太陽の周りを半径 R [km]、公転周期 T [year] の円軌道を実行している。

- (1) 太陽からの距離が r_q [m] の遠日点 Q を通過するときの速さを求めよ
- (2) ハレー彗星の公転周期を求めよ。

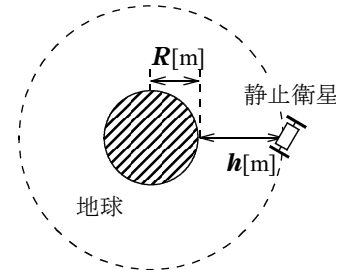
2 次の文章を読み、空欄 1～6 に適切な式・語句を入れよ。

惑星の公転軌道を近似的に円と考えると、ケプラーの第 2 法則から惑星は等速円運動をする。太陽が惑星に及ぼす力 F [N] が向心力であるから、惑星の質量を m [kg]、角速度を ω [rad/s]、軌道半径を r [m] とすると、惑星について運動方程式を立てることから $F = (1)$ [N] となる。ここで、公転周期を T [s] とすると、 $F = (2)$ [N] と式変形できる。さらにケプラーの第 3 法則から (3) となる (比例定数 k) ので、 T を消去すると、 $F = (4)$ [N] と式変形できる。惑星も太陽の引力の反作用として、大きさが等しく、向きが反対の引力を太陽に及ぼしている。

ニュートンは、一般に 2 つの物体はつねに両者の質量に比例し、距離の 2 乗に反比例する引力を及ぼしあっていると結論した。この引力はすべての物体の間で働くので、(5) 力と呼ばれる。

3 次の文章を読み、空欄 1～5 に適切な式を入れよ。

半径 R [m]、質量 M [kg] の地球の上空 h [m] を回転している質量 m [kg] の静止衛星がある。この衛星に働く向心力は地球の自転周期を T [s] を使うと (1) となり、万有引力定数 G [N・m²/kg²] を使うと (2) となる。これより、 $h = (3)$ と求まる。また、地表面では重力と万有引力が等しくなることから、重力加速度 g [m/s²] を使って、 $GM = (4)$ となる。これより、 g 、 R 、 T を使って $h = (5)$ と求まる。



4 次の文章を読み、空欄 1～5 に適切な式・語句を入れよ。ただし、万有引力定数を G [N・m²/kg²] とする。

半径 R [m]、質量 M [kg] の緯度 θ の地球 (自転周期 T [s]) 表面上に置かれた質量 m [kg] の物体に働く力を考える。まず、地球との間に大きさ (1) [N] の万有引力が働く。地球上で見ると物体は静止しているが、宇宙から見れば円運動している。この半径は (2) [m] となるので、この物体には大きさ (3) [N] の (4) 力が働く。このとき、物体に働く万有引力と (4) 力の合力を重力という。実際に、値を代入して計算すると、万有引力は (4) 力の約 300 倍大きいことが分かる。これより、我々に働く重力の方向は地球の中心を向いていると考えてよい。

5 次の文章を読み、各問いに答えよ。ただし、万有引力定数を G [N・m²/kg²] とする。

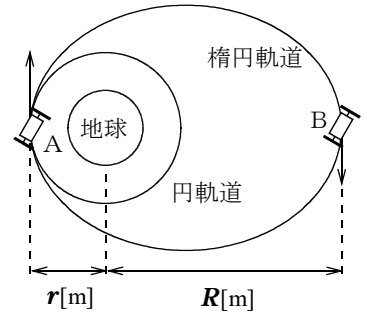
半径 R [m]、質量 M [kg] の地球の表面すれすれをロケットが等速円運動している。このときの速さを第 1 宇宙速度という。次に、ロケットを地上から打ち上げた。打ち上げ時の速さがある速さ以上になるとロケットが地球の及ぼす引力圏内から飛び出し戻ってこなくなる。このときの速さを第 2 宇宙速度という。

- (1) 第 1 宇宙速度を求めよ。
- (2) 第 2 宇宙速度を求めよ。
- (3) $R = 6400$ [km]、重力加速度を 9.8 [m/s²] とし第 1、第 2 宇宙速度を計算せよ。

6 次の文章を読み、各問いに答えよ。ただし、万有引力定数を $G[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$ とする。

質量 $M[\text{kg}]$ の地球を中心とした半径 $r[\text{m}]$ の円軌道を等速で円運動している質量 $m[\text{kg}]$ の衛星が、図中の点 A (近日点) に来たときに加速して速さ $v_1[\text{m/s}]$ にしたところ、地球を1つの焦点とした楕円軌道を描いた。遠日点に来たときの地球の中心からの距離は $R[\text{m}]$ 、速さは $v_2[\text{m/s}]$ であった。

- (1) 等速円運動しているとき、衛星の速さ $v[\text{m/s}]$ として、運動方程式を立てよ。
- (2) v を求めよ。
- (3) 近日点と遠日点での力学的エネルギー保存則を立てよ。ただし、万有引力による位置エネルギーは無限遠で 0 とする。
- (4) 近日点と遠日点でのケプラーの第2法則 (面積速度一定の法則) を立てよ。
- (5) v_1 を用いずに、 v_2 を求めよ。
- (6) 楕円軌道での周期は円軌道での周期の何倍か。



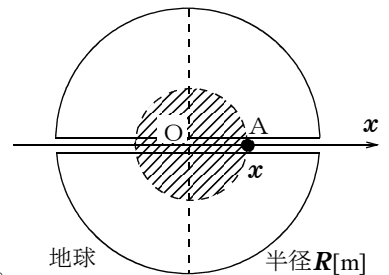
【チャレンジ問題】

7 次の文章を読み、空欄 1~5 に適切な式を入れよ。ただし、重力加速度を $g[\text{m/s}^2]$ とする。

図のように、地球 (質量 $M[\text{kg}]$, 半径 $R[\text{m}]$) を貫通する地球トンネルを作る。(図1) では地球の中心を通るように、(図2) では、地球の中心を通らないようにして、トンネルが掘られている。このトンネル内で働く万有引力を利用して、トンネルの端から端まで物体を移動させる。(図1) 中の点 A ($x = x$) に質量 $m[\text{kg}]$ の物体があるとする。ここで物体に働く万有引力は原点 O を中心とした半径 x の球の部分 (図中の斜線部分) からしか受けないことが分かっている。ただし、 x 軸は地球の中心を原点としたトンネルの方向にとったものである。

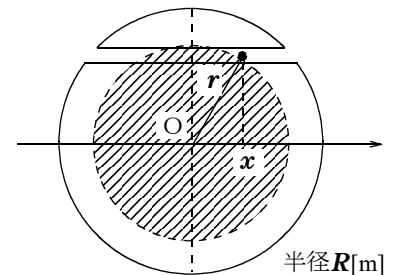
[1] (図1) について

- (1) 地球の密度を求めよ。
- (2) (図1) 中の斜線部分を占める地球の質量を求めよ。
- (3) $x = x$ にある物体に働く万有引力の大きさを求めよ。
- (4) x 軸方向に生じる加速度を a として、運動方程式を立てよ。
- (5) 単振動の周期を求めよ。



[2] (図2) について

- (6) (図2) 中の斜線部分 (半径 $r[\text{m}]$) を占める地球の質量を求めよ。
- (7) $x = x$ にある物体に働く万有引力の大きさを求めよ。
- (8) x 軸方向に生じる加速度を a' として、運動方程式を立てよ。
- (9) 単振動の周期を求めよ。



8 次の文章を読み、各問いに答えよ。【08千葉大】

地球のまわりにおける質量 m の物体の運動を考える。ここで、地球は半径 R 、質量 M の球であると仮定する。地球の自転と物体に働く空気の抵抗は無視する。また、万有引力定数を G とし、万有引力による位置エネルギーは、無限遠方において 0 とする。以下の問いに答えなさい。解答では、 G 、 m 、 M 、 R から必要な記号を用いて表すこと。

問1 地上での重力加速度の大きさ g を求めよ。

問2 質量 m の物体を地上から水平投射する。物体が地表面すれすれに等速円運動するための発射速度の大きさ v_0 を求めよ。

問3 質量 m の物体を地上から鉛直上方に、問2と同じ速度の大きさ v_0 で発射した。物体が到達する最高点の地上からの高さを求めよ。

問4 質量 m の物体を地上から鉛直上方に発射した。物体が再び地上に戻ってこないようにするためには必要な最小の発射速度の大きさを求めよ。

問5 物体の運動エネルギーや位置エネルギーは円運動の半径にどのように依存するかを考えてみる。質量 m の物体が地球の中心から距離 kR の位置において地球の周りを等速円運動している。ここで、 k は 1 より大きい定数である。このとき、物体の運動エネルギー K 、万有引力による位置エネルギー U 、および、その比 K/U を求めよ。解答は、 G 、 m 、 M 、 R のほかに k を用いてもよい。

9 次の文章を読み、空欄 1～9 に適切な式・語句を入れよ。【07同志社大】

ケプラーは惑星の運動に関するデータを整理して、3つの法則を発見した。その第1法則は「惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描く」ことである。第2法則は、「(1) が一定である」と表現される。ニュートンは、万有引力の法則を仮定すれば、第3法則も含めたケプラーの3つの法則を導けることを示した。ここで、惑星は静止している太陽を中心として等速円運動をすると仮定して、万有引力の法則を用いてケプラーの第3法則を導き、惑星がもつ力学的エネルギーについて考えよう。

質量 M [kg] の太陽を中心とする半径 r [m] の円軌道上を質量 m [kg] の惑星が公転している。万有引力定数を G [$\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$] とすると、太陽と惑星の間にはたらく万有引力の大きさは (2) [N] と表される。また、惑星の公転周期 T [s] を用いると、角速度は (3) [rad/s] と表され、加速度の大きさは (4) [m/s^2] となる。この加速度は万有引力によるものなので、加速度と力の関係から、公転周期 T と軌道半径 r の間に $T^2 =$ (5) の関係が得られる。これが、惑星の公転軌道を円と仮定したときの、ケプラーの第3法則である。公転軌道が楕円軌道の場合は、惑星の公転周期と楕円軌道の半長軸の長さとの間に同様の関係が成り立つ。

太陽を中心とした半径 r の円軌道を公転周期 T で等速円運動している質量 m の惑星の運動エネルギーは、 T を用いて (6) [J] と表されるが、前に求めた T と r の関係より T を消去すると、 G を用いて (7) [J] と書き改めることができる。一方、質量 M の太陽から距離が r である惑星の位置エネルギーは、その基準点を万有引力が 0 となる無限遠点にとれば、(8) [J] と表され、惑星が持つ力学的エネルギーは (9) [J] となる。

10 次の文章を読み、各問いに答えよ。【09愛媛大改題】

地球のまわりを運動する物体について考える。地球は質量 M 、半径 R の一様な球であるとし、地球のまわりの物体は地球から万有引力を受けるが、他の惑星や太陽からの万有引力は無視してよいとする。地球の自転と公転、地球大気による空気抵抗は無視する。万有引力定数を G とする。

問1 質量 m_0 の質点とみなせる宇宙ステーションが地球の中心のまわりを半径 r 、速さ v_0 で等速円運動している (図1)。

- (1) 宇宙ステーションから受ける向心力の大きさを G 、 M 、 m_0 、 r を用いて表せ。
- (2) 宇宙ステーションの向心加速度を r 、 v_0 を用いて表せ。
- (3) 円運動の周期 T_0 を r 、 G 、 M を用いて表せ。
- (4) ケプラーの第3法則によると、公転周期の2乗は軌道楕円の半長軸の3乗に比例する。ここで考えている宇宙ステーションのように軌道が円の場合には、半長軸として円の半径を用いればよい。すなわち、比例定数を k とすると、 $T_0^2 = kr^3$ である。 k を G 、 M を用いて表せ。

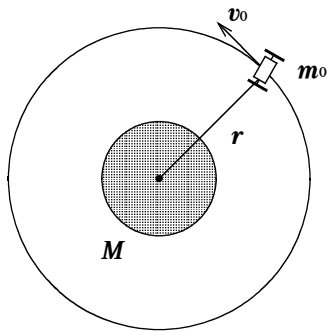
問2 地球上の一点Aから地表の接線方向に、質量 m_1 の質点とみなせる補給船を初速 v_1 で打ち上げる。補給船は楕円軌道を描いて飛行する。地球に対して反対側の点Bに達したとき、地球の中心からの距離が r であり、そのときの速さが v_2 であった (図2)。

- (1) 補給船の点Aと点Bでの力学的エネルギーをそれぞれ求めよ。ただし、万有引力による位置エネルギーは無限遠で0とする。
- (2) 点Aと点Bでのケプラーの第2法則 (面積速度一定の法則) を立てよ。
- (3) v_2 を G 、 M 、 R 、 r を用いて表せ。
- (4) ケプラーの第3法則を用いて、この楕円軌道の周期 T_1 を G 、 M 、 R 、 r を用いて表せ。

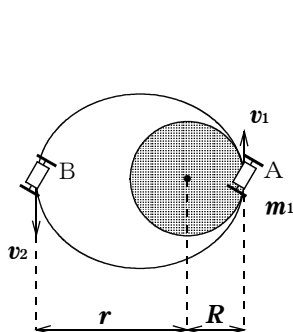
問3 問1の宇宙ステーションと問2の補給船の運動を考える。問1の距離 r と問2の距離 r は等しく、宇宙ステーションと補給船はともに図3で同一平面内を反時計周りに運動する。宇宙ステーションと補給船の間に働く万有引力は無視する。

等速円運動する宇宙ステーションの位置を図3に示した角度 θ [rad] で表す。ただし、地球の中心から見て点Aのある方向にあるときを $\theta = 0$ とし、反時計周りに θ の値が増加するものとする。

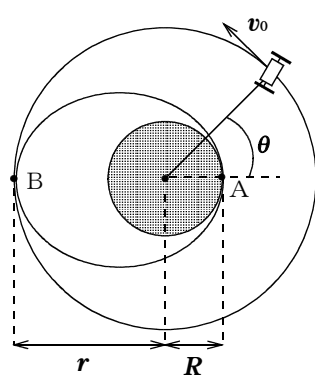
- (1) 宇宙ステーションが $\theta = \theta_0$ [rad] の位置に達した瞬間に、問2と同じように補給船を打ち上げる。補給船は楕円軌道を半周し点B ($\theta = \pi$ [rad]) で宇宙ステーションと遭遇した。 θ_0 を R 、 r を用いて表せ。
- (2) v_0 と v_2 の大小関係はどうなるか。また、補給船が宇宙ステーションと同じ軌道を等速円運動するには、補給船は点Bに達した瞬間に進行方向の速さをどのようにすればよいか。



(図1)



(図2)



(図3)