物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.10
円運動・慣性力編
ブツリヨキワメヨ

1

（イ）　角速度は単位時間で回転する角度なので，$\boldsymbol{t}$[s]で$\boldsymbol{\omega t}$[rad]回転する。

（ロ）　弧度法で弧の長さを求める数学公式（$\boldsymbol{l=r\theta}$）から，$\boldsymbol{r\omega t}$[m]となる。

（ハ）　$\boldsymbol{t}$[s]間で（ロ）で求めた分だけ進むので，単位時間当たりの進む距離，つまり，速さは$\boldsymbol{r\omega}$[m/s]となる。

（ニ）　速度は回転した分だけ回転しているので，求める角は$\boldsymbol{\omega t}$[rad]となる。

（ホ）　弧ＢＣの長さは，（ロ）と同様にして，
$\boldsymbol{r\omega\times\ \omega t=r\omega^2 t}$[m/s]

（ヘ）　加速度は単位時間当たりの速度変化なので，
$\boldsymbol{\dfrac{r\omega^2 t}{t}=r\omega^2}$[m/s^2]

（ト）　運動方程式（$\boldsymbol{ma=f}$）より，$\boldsymbol{mr\omega^2}$[N]となる。

（チ）　接線

（リ）　法線（接線に対して垂直）

（ヌ）　１周すると$\boldsymbol{2\pi}$[rad]回転することから，１周するのにかかる時間，つまり，周期は$\boldsymbol{\dfrac{2\pi}{\omega}}$[s]となる。

（ル）　１周するのに$\boldsymbol{\dfrac{2\pi}{\omega}}$[s]かかるので，単位時間当たりの回転数は$\boldsymbol{\dfrac{\omega}{2\pi}}$[Hz]となる。

(1)　１周するのにかかる時間

(2)　単位時間当たりに回転する回数

(3)　（ヌ）と（ル）の結果，または，それぞれの定義から，$\boldsymbol{n=\dfrac{1}{T}}$

※周期と回転数は逆数の関係にある。

(4)　（ハ）より，円運動の速さ$\boldsymbol{v}$は，$\boldsymbol{v=r\omega}$と表せる。これと，（ヘ）より，円運動の加速度$\boldsymbol{a}$は，
$\boldsymbol{a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega}$

2

(1)　（$\boldsymbol{T=\dfrac{2\pi}{\omega}}$）より，$\boldsymbol{2}$[s]となる。

(2)　（$\boldsymbol{T=\dfrac{2\pi}{\omega}}$）より，$\boldsymbol{2}$[s]となり，周期と回転数が逆数の関係にあることから，

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}=0.5}$[Hz]

(3)　（$\boldsymbol{T=\dfrac{2\pi}{\omega}}$）より，$\boldsymbol{\pi}$ [rad/s]となる。

(4)　周期と回転数が逆数の関係にあることから，$\boldsymbol{0.5}$[Hz]となる。

(5)　周期と回転数が逆数の関係にあることから，4[s]となる。

(6)　($T=\dfrac{2\pi}{\omega}$) より，$\dfrac{\pi}{2}$[rad/s]となる。

(7)　($v=r\omega$) より，4.0[m/s]となる。また，向きは円の接線方向となっている。

(8)　円運動の加速度 ($a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$) より，2.0[m/s^2]となる。また，向きは円の中心向きとなっている。

(9)　円運動の加速度 ($a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$) より，4.0[m/s^2]となる。また，向きは円の中心向きとなっている。

(10)　円運動の加速度 ($a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$) より，8.0[m/s^2]となる。また，向きは円の中心向きとなっている。

3

(1)　円運動の加速度 ($a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$) より，$l\omega^2$[m/s^2]となる。

(2)　中心向きに加速度をとって，運動方程式 ($ma=f$) より，$ml\omega^2=S$となる。

(3)　(2)を式変形すると，$\sqrt{\dfrac{S}{ml}}$ となり，($T=\dfrac{2\pi}{\omega}$) より，$2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{S}}$ [s]となる。

4

(1)　張力を S とおくと，鉛直方向の力のつり合いより，

$S\cos\theta=mg \Leftrightarrow S=\dfrac{mg}{\cos\theta}$ [N]

(2)　図より，$S\cos\theta$ であり，(1)から S を消去すると，

$\dfrac{mg}{\cos\theta}\sin\theta=mg\tan\theta$

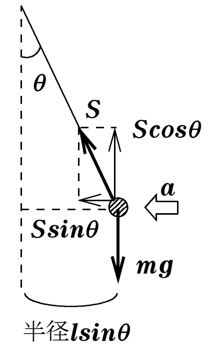
(3)　円運動の加速度 ($a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$) より，中心向きに加速度をとって，運動方程式 ($ma=f$) より，

$m(l\sin\theta)\omega^2=mg\tan\theta$

(4)　(3)で求めた式を変形すると，

$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$ [rad/s]

(5)　($T=\dfrac{2\pi}{\omega}$) より，$2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$ [s]となる。



5

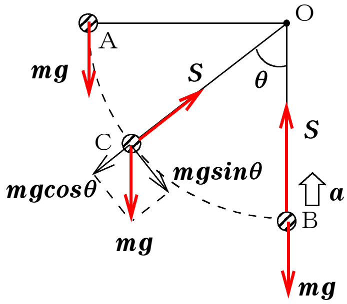
(1)　求める速さを v として，点Aと点Bについて，力学的エネルギー保存則 ($K+U=$一定) より，

$\dfrac{1}{2}mv^2+0=0+mgl \Leftrightarrow v=\sqrt{2gl}$ [m/s]

(2)　求める張力の大きさを T として，円運動の加速度 ($a=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}=v\omega$) より，中心向きに加速度をとって，運動方程式 ($ma=f$) より，

$m\dfrac{v^2}{l}=T-mg \Leftrightarrow T=3mg$ [N]

※(1)で求めた v を代入した。



(3)　求める速さを v' として，点Aと点Cについて，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv'^2+mgl(1-\cos\theta)=0+mgl \Leftrightarrow v=\sqrt{2gl\cos\theta}\ [\mathrm{m/s}]$$

(4)　速さ 0 より，中心向きの加速度も 0 となるので，張力の大きさも 0 となる。

(5)　求める張力の大きさを S として，円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）より，

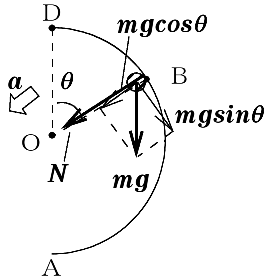
$$m\frac{v'^2}{l}=S-mg\cos\theta \Leftrightarrow S=3mg\cos\theta\ [\mathrm{N}]$$

※(3) で求めた v' を代入した。

6

(1)　求める速さを v' として，点Aと点Bについて，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=\frac{1}{2}mv'^2+mgr(1+\cos\theta) \Leftrightarrow v'=\sqrt{v^2-2gr(1+\cos\theta)}\ [\mathrm{m/s}]$$



(2)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，

$$m\frac{v^2-2gr(1+\cos\theta)}{r}\ [\mathrm{m/s^2}]$$

(3)　中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）より，

$$m\frac{v^2-2gr(1+\cos\theta)}{r}=N+mg\cos\theta$$

(4)　(3) で求めた式を変形して，

$$N=m\left(\frac{v^2}{r}-g(2+3\cos\theta)\right)[\mathrm{N}]$$

(5)　物体が面から離れるときは垂直抗力が 0 となるので，(4) で求めた式より，

$$\frac{v^2}{r}-g(2+3\cos\theta)=0 \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{v^2-2gr}{3gr}$$

7

(1)　慣性力の大きさは質量と観測者の加速度の積で与えられるので，$\underline{ma}$[N]となる。

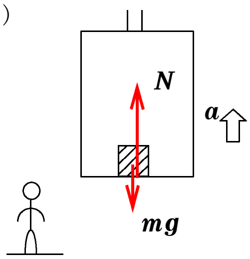
(2)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，$\underline{mr\omega^2}$[N]となる。

(3)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，$\underline{m\frac{v^2}{r}}$[N]となる。

(4)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，$\underline{mv\omega}$[N]となる。

8

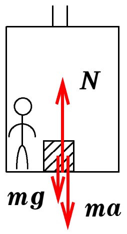
(1)



(2)　運動方程式（$ma=f$）より，$\underline{ma=N-mg}$となる。

(3)　(2) で求めた式を計算して，$\underline{N=m(g+a)}$[N]となる。

(4)



(5)　力のつりあいより，$ma+mg=N$となる。

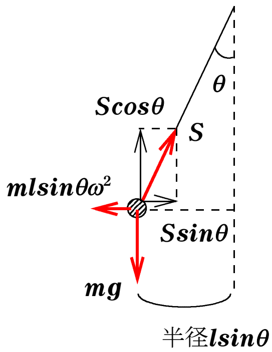
(6)　(5)より，$N=m(g+a)$[N]となる。

□■物理的思考■□
　慣性力が働くときと働かないときの区別はしっかりとつけておきたい。慣性力は，観測者が加速度を持って運動しているの時にのみ生じる。この問題の後半ではエレベーター内の観測者なので加速度が生じているので慣性力が働く。また，この観測者から見るとエレベーター内の物体は静止している。このため，物体について立てる式は力のつり合いとなる。これから必要となるのは，物体が，誰からみて，どのような運動をしているのかを見極めないといけない。

9

(1)　張力を S とおくと，鉛直方向の力のつり合いより，

$$S\cos\theta=mg \Leftrightarrow S=\frac{mg}{\cos\theta}\ \text{[N]}$$



(2)【解法１】
　物体と一緒に円運動する観測者から見た場合，観測者は円運動をしているので，円運動の加速度と反対向きに遠心力（慣性力）が生じている。円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，この大きさが $ml\sin\theta\omega^2$ となる。この観測者から見ると，物体は静止いしているので，水平方向について力のつり合いより，

$$m(l\sin\theta)\omega^2=mg\tan\theta$$

$$\Leftrightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}\ \text{[rad/s]}$$

（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，

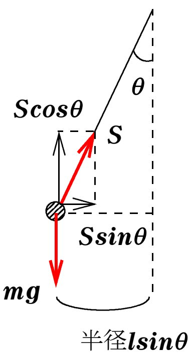
$$2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}\ \text{[s]}$$

【解法２】
　地上で静止している観測者から見た場合，物体は円運動をしているので，円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）より，

$$m(l\sin\theta)\omega^2=mg\tan\theta$$

$$\Leftrightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}\ \text{[rad/s]}$$

（$T=\frac{2\pi}{\omega}$）より，$2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$ [s]



(3)　($v=r\omega$) より，

$\sin\theta\sqrt{\dfrac{gl}{\cos\theta}}$　[m/s]

(4)　地面に衝突する直前の速さの鉛直成分を v として，鉛直方向の運動に注目して，($v^2-v_0{}^2=2aS$) より，

$v^2-(0)^2=2gh \Leftrightarrow v=\sqrt{2gh}$

物体と地面とのはねかえり係数を e とおくと，衝突後の物体の速さを v' として，はねかえりの式 ($e=\dfrac{\text{衝突後に遠ざかる速さ}}{\text{衝突前に近づく速さ}}$) より，

$e=\dfrac{v'}{v} \Leftrightarrow v'=ev=e\sqrt{2gh}$

この後、物体は高さ $\dfrac{h}{4}$ まで上昇するので，鉛直方向の運動に注目して，($v^2-v_0{}^2=2aS$) より，

$(0)^2-(e\sqrt{2gh})^2=2(-g)\dfrac{h}{4} \Leftrightarrow e=\dfrac{1}{2}$

(5)　糸が切れてから地面に衝突するまでの時間を t として，鉛直方向の運動に注目して，($S=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$) より，

$h=(0)t+\dfrac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

地面に衝突してから壁に衝突するまでの時間を t' として，鉛直方向の運動に注目して，($v=v_0+at$) より，

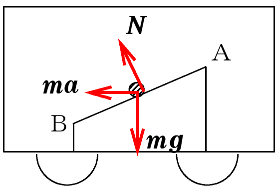
$0=e\sqrt{2gh}-gt' \Leftrightarrow t'=\dfrac{e\sqrt{2gh}}{g}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

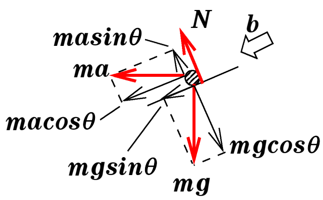
水平方向は一定の速さで進んでいるので，求める距離 L は，速さと時間の積から，

$\sin\theta\sqrt{\dfrac{gl}{\cos\theta}}\left(\sqrt{\dfrac{2h}{g}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right)=3\sin\theta\sqrt{\dfrac{lh}{2\cos\theta}}$　[m]

10

(1)　電車内の人には加速度が生じているので，加速度と反対向きに慣性力が生じていることに注意して，





(2)　小球は斜面ＡＢ上を加速度運動するので，斜面下向きの加速度を b として，運動方程式 ($ma=f$) より，

$mb=mg\sin\theta+ma\cos\theta$

(3)　観測者から見て，斜面平行方向は物体が静止しているので，斜面平行方向について，力のつり合いより，

$N+ma\sin\theta=mg\cos\theta \Leftrightarrow N=m(g\cos\theta-a\sin\theta)$ [N]

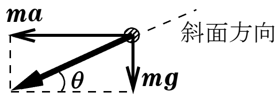
(4)　小球が斜面上を運動するためには，斜面から離れてはいけないので，垂直抗力が 0 より小さくなってはいけない。これと(3)の答えより，

$g\cos\theta-a\sin\theta=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{g\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{g}{\tan\theta}$ …①

また，この時の電車内の人から見た加速度は(2)の答えより，

$b=g\sin\theta+\left(\dfrac{g}{\tan\theta}\right)\cos\theta=\dfrac{g}{\sin\theta}$ [m/s^2]

(5)　小球が斜面から飛び出た後は，重力と慣性力だけが働いている。①式から考えると，慣性力と重力の合力は斜面に沿った方向となっている。また，小球が斜面を飛び出すときの速度も斜面に沿った方向となっているので，物体は斜面に沿った方向（②）に等加速度運動する。



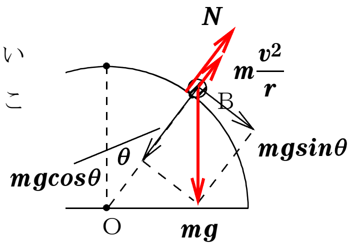
11

(1)　求める速さを $\boldsymbol{v}$ として，点Ａと点Ｂについて，力学的エネルギー保存則（$K+U$=一定）より，

$$0+mgR=\frac{1}{2}mv'^2+mgR\cos\theta \Leftrightarrow v=\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}\ \text{[m/s]}$$

(2)【解法１】

物体と一緒に運動する観測者から見た場合，観測者には加速度が生じているので，慣性力が生じている。円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，この大きさが



$$m\frac{v^2}{R}=2mg(1-\cos\theta)$$

となる。この観測者から見ると，物体は静止いしているので，垂直抗力を N として，ＢＯ方向について力のつり合いより，

$mg\cos\theta=2mg(1-\cos\theta)+N \Leftrightarrow N=mg(3\cos\theta-2)$

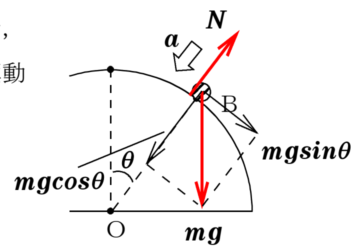
点Ｂで離れることから，垂直抗力が 0 となることきなので，

$$3\cos\theta-2=0 \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2}{3}$$

※この場合の物体の加速度は円運動の成分（向心成分）だけでなく，接線方向にも加速度が生じている。このため，等速円運動とはなってはいない。したがって，本来なら慣性力は，接線方向にも生じているが，今回は問題に影響がないため省略している。

【解法２】

地上で静止している観測者から見た場合，物体は円運動をしているので，円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）より，



$m(2g(1-\cos\theta))=mg\cos\theta-N \Leftrightarrow N=mg(3\cos\theta-2)$

※加速度は【解法１】と同様にして求めたものを代入している。

点Ｂで離れることから，垂直抗力が 0 となることきなので，

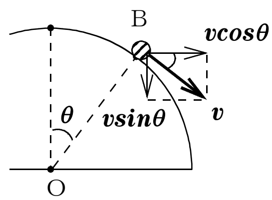
$$3\cos\theta-2=0 \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2}{3}$$

(3)　　地面に衝突する直前の速さの鉛直成分を v' として，鉛直方向の運動に注目して，（$v^2-v_0^2=2aS$）より，

$v'^2-(v\sin\theta)^2=2gR\cos\theta$ …①

数学公式（$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$）より，

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}\ \cdots②$$



①式と②式，および，(1)と(2)の答えから計算すると，

$$v'=\sqrt{\frac{46gR}{27}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{46gR}{3}}\ \text{[m/s]}$$

(4)　水平方向の速さは変わらないので，

$$v\cos\theta=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

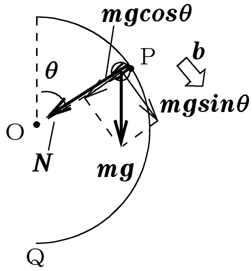
図より，

$$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{46gR}{3}}}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gR}{3}}}=\frac{\sqrt{23}}{2}$$

12

(1)　求める速さを v' として，点Ｐと点Ｑについて，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+mgr(1+\cos\theta)=\frac{1}{2}mv'^2+0\Leftrightarrow v'=\sqrt{v^2+2gr(1+\cos\theta)}\ \text{[m/s]}$$



(2)　円運動の加速度（$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega$）より，

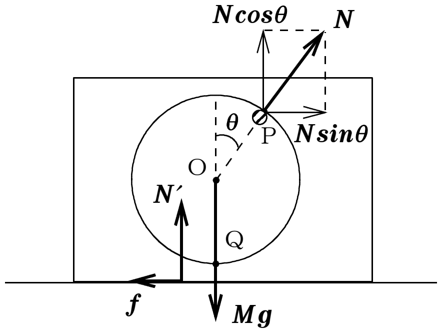
$$a=\frac{v^2}{r}\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

接戦方向に働く力は $mg\sin\theta$ なので，運動方程式（$ma=f$）より，

$$mb=mg\sin\theta\Leftrightarrow b=g\sin\theta\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

(3)　中心向きに加速度をとって，運動方程式（$ma=f$）より，

$$m\frac{v^2}{r}=N+ng\cos\theta\Leftrightarrow N=m\left(\frac{v^2}{r}-g\cos\theta\right)\text{[N]}$$



(4)　ブロックに働く垂直抗力と摩擦力をそれぞれ，N'，f として，
力のつり合いの式より，
水平方向：$N\sin\theta=f$
鉛直方向：$N\cos\theta+N'=Mg$
これらの式と(3)の答えより，

$$N'=Mg-m\cos\theta\left(\frac{v^2}{r}-g\cos\theta\right),\ f=m\sin\theta\left(\frac{v^2}{r}-g\cos\theta\right)\text{[N]}$$

(5)　点Ｐで小球が面から離れることより，この時の小球が受ける垂直抗力が 0 となるので，(3)の答えより，

$$\frac{v^2}{r}-g\cos\theta=a-g\sin\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=a-\frac{b}{\tan\theta}=0\Leftrightarrow b=a\tan\theta$$

(6)　小球は点Ｐで面から離れてから斜方投射をする。速さの水平成分と鉛直成分はそれぞれ，$v\cos\theta$，$v\sin\theta$ となるので，同じ高さになることから，同じ高さになる時間を t として，鉛直方向について，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$0=v\sin\theta\, t+\frac{1}{2}(-g)t^2\Leftrightarrow\frac{g}{2}t\left(t-\frac{2v\sin\theta}{g}\right)\Leftrightarrow t=0,\ \frac{2v\sin\theta}{g}$$

題意から考えて，点Ｂの到達時刻は $\frac{2v\sin\theta}{g}$ と求まる。

ここで求めた時刻を用いて，水平方向について，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$v\cos\theta\frac{2v\sin\theta}{g}=\frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v^2\sin2\theta}{g}$$

※数学の公式 $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$ を利用している。（問題集 No.1 で既出）

13

(1)　求める加速度の大きさを $\boldsymbol{a}$ とすると，運動方程式（$\boldsymbol{ma=f}$）より，

$\boldsymbol{ma=mg\sin\theta \Leftrightarrow a=gsi\theta}$

(2)　（$\boldsymbol{v^2-v_0{}^2=2aS}$）より，

$\boldsymbol{v^2-(0)^2=2g\sin\theta\, l \Leftrightarrow v=\sqrt{2gl\sin\theta}}$ [m/s]

(3)　求める加速度の大きさを $\boldsymbol{a'}$ とすると，運動方程式（$\boldsymbol{ma=f}$）より，

$\boldsymbol{ma'=mg\sin\theta+mb\cos\theta \Leftrightarrow a'=g\sin\theta+b\cos\theta}$ [m/s²]

(4)　求める垂直抗力を $\boldsymbol{N}$ として，斜面に対して垂直な方向について，力のつり合いより，

$\boldsymbol{N+mb\sin\theta=mg\cos\theta \Leftrightarrow N=m(g\cos\theta-b\sin\theta)}$ [N]

(5)　台の水平方向について，運動方程式（$\boldsymbol{ma=f}$）より，

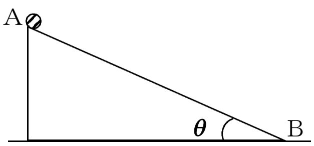
$$\boldsymbol{Mb=N\sin\theta=m\sin\theta\,(g\cos\theta-b\sin\theta) \Leftrightarrow b=\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g}\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

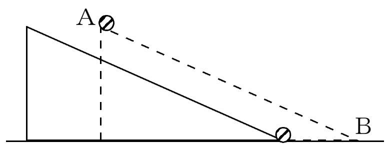
(6)　(5)の答えに，(3)で求めた答えに代入して，

$$\boldsymbol{a'=g\sin\theta+\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g\cos\theta=\frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g}\ \text{[m/s}^2\text{]}$$

□■物理的思考■□

　この問題はとても複雑な問題になっているが，慣性力を使う，つまり，台と一緒に運動する観測者から問題を考ええることで簡単に解くことができる。しかし，地上の人から見ると大変複雑になってしまう。次の図を見てもらうと分かるように，台が動くことで，小球は斜面に沿って運動していないことが分かる。



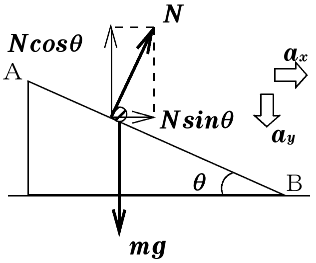


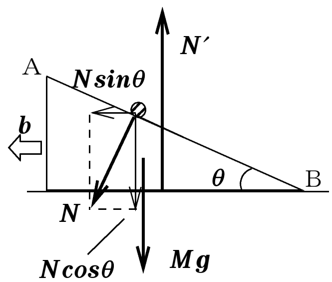
この場合の解法としては，小球と台それぞれについて運動方程式（$\boldsymbol{ma=f}$）を立てることである。

小球の水平方向：$\boldsymbol{ma_x=N\sin\theta}$

小球の鉛直方向：$\boldsymbol{ma_y=mg-N\cos\theta}$

台の水平方向：$\boldsymbol{Mb=N\sin\theta}$





未知数の数に対して式の数が足りないので，もう１つ式を立てないと計算はできない。小球が斜面に沿って運動しているという条件から，台から見た小球の加速度（相対加速度）が斜面に沿っていないといけない。したがって，

$$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{a_y}{a_x-(-b)}}$$

※これを束縛条件と言う。

以上４つの式から計算すれば答えが出る。