物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.8
仕事とエネルギー編
ブツリヨキワメヨ

1

□■物理的思考■□
　仕事は力と変位の積で表される物理量だが，移動方向に対して働く力でないと仕事はできない。したがって，移動方向に対して垂直な方向に働く力は，物体が進んでいたとしても仕事をしたとは言わない。ここでも，物理で大事な考え方である、「垂直な２方向に分解して考える」ことが大事となり，移動方向とそれに対して垂直な方向に力を分解して考える必要がある。

(1)　（仕事＝力× 距離）より，
重力：**0**
張力：$10\times 10=\mathbf{1.0\times 10^2}$[J]
垂直抗力：**0**

(2)　（仕事＝力× 距離）より，
重力：**0**
張力：$10\cos 30^\circ \times 10 \rightarrow \mathbf{8.7\times 10}$[J]
垂直抗力：**0**

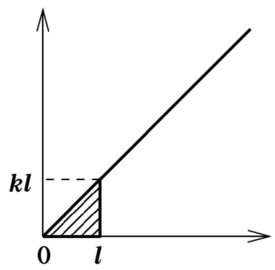
(3)　（仕事＝力× 距離）より，
重力：**0**
張力：$F\cos\theta \times l = \boldsymbol{Fl\cos\theta}$ [J]
垂直抗力：**0**

(4)　（仕事＝力× 距離）より，
摩擦力：$-f\times l = \boldsymbol{-fl}$[J]
張力：$F\times l = \boldsymbol{Fl}$[J]
垂直抗力：**0**

(5)　（仕事＝力× 距離）より，
摩擦力：$-f\times l = \boldsymbol{-fl}$[J]
張力：$F\cos\theta \times l = \boldsymbol{Fl\cos\theta}$ [J]
垂直抗力：**0**

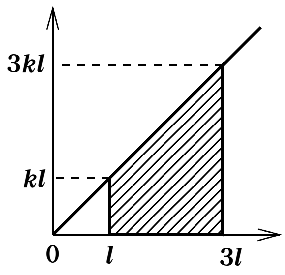
(6)　今回は力が弾性力となり，大きさが一定ではないので，公式（仕事＝力× 距離）を使用できない。このため，縦軸を力 f，横軸を距離 x とした（$f-x$）図の面積が仕事に等しいことを用いる。右図の斜線部の面積が仕事となることから，

$\boldsymbol{\frac{1}{2}kl^2}$[J]



(7)　今回は力が弾性力となり，大きさが一定ではないので，公式（仕事＝力× 距離）を使用できない。このため，縦軸を力 f，横軸を距離 x とした（$f-x$）図の面積が仕事に等しいことを用いる。右図の斜線部の面積が仕事となることから，

$\frac{1}{2}k(3l)^2-\frac{1}{2}kl^2=\boldsymbol{4kl^2}$[J]



2

（イ）　mg[N]

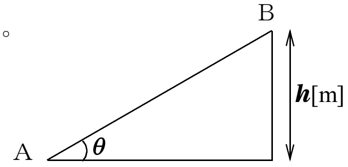
（ロ）　鉛直上向き

（ハ）　文中にある「ゆっくり」から力のつり合いと考え，$\underline{mg}$[N]となる。

（ニ）　（仕事＝力× 距離）より，$\underline{mgh}$[J]

（ホ）　$mg\sin\theta$[N]

（ヘ）　図より，$\sin\theta=\dfrac{h}{\mathrm{AB}}\Leftrightarrow \mathrm{AB}=\dfrac{h}{\sin\theta}$ [m]



（ト）　仕事の原理

※斜面を使ったときの仕事量は，（仕事＝力× 距離）より，

$$mg\sin\theta\times\frac{h}{\sin\theta}=mgh$$

となり，斜面を使わないときの仕事量に等しい。物体を持ち上げるのに，道具を用いても仕事量が変わっていない。

3

(1)　重力は常に鉛直下向きで，鉛直下向きに移動距離は l なので，（仕事＝力× 距離）より，重力のした仕事は $\underline{mgl}$[N]となる。一方，張力は移動方向（速度）に対して常に垂直なので仕事ができない。したがって，張力のした仕事は $\underline{0}$ となる。

(2)　重力は常に鉛直下向きで，鉛直下向きに移動距離は R なので，（仕事＝力× 距離）より，重力のした仕事は $\underline{mgR}$[N]となる。一方，垂直抗力は移動方向（速度）に対して常に垂直なので仕事ができない。したがって，垂直抗力のした仕事は $\underline{0}$ となる。

(3)　重力は常に鉛直下向きで，鉛直下向きに移動距離は h なので，（仕事＝力× 距離）より，重力のした仕事は $\underline{mgh}$[N]となる。

4

【ポイント】
仕事率は時間に対する仕事の割合（率）を表したもので，単位時間当たりの仕事量を仕事率という。したがって，求めた仕事を時間で割るだけで簡単に求まる。

(1)　（仕事率＝仕事÷ 時間）より，

$$\frac{100}{10}=10\ [\mathrm{W}]$$

(2)　（仕事率＝仕事÷ 時間）より，

$$\frac{50\sqrt{3}}{5}\rightarrow 17\ [\mathrm{W}]$$

(3)　（仕事率＝仕事÷ 時間）より，

$$\frac{Fl\cos\theta}{t}\ [\mathrm{W}]$$

(4)　（仕事率＝仕事÷ 時間）より，

摩擦力：$-\dfrac{fl}{t}$ [W]

張力：$\dfrac{Fl}{t}$ [W]

(5)　（仕事率＝仕事÷ 時間）より，

摩擦力：$-\dfrac{fl}{t}$ [W]

張力：$\dfrac{Fl\cos\theta}{t}$ [W]

(6)　**1** (6) で求めた仕事を時間 t で割って，

$\dfrac{kl^2}{2t}$ [W]

(7)　**1** (7) で求めた仕事を時間 t で割って，

$\dfrac{4kl^2}{t}$ [W]

5

（イ）　エネルギー
（ロ）　運動エネルギー
（ハ）　K
（ニ）　作用と反作用は大きさが等しいので，F[N]となる。
（ホ）　作用と反作用は向きが反対なので，働く力 F は左向きとなる。右向きの加速度を a として，運動方程式（$ma=f$）より，

$ma=-F$…①

（ヘ）　（$v^2-v_0{}^2=2aS$）より，

$(0)^2-v^2=2ax \Leftrightarrow v^2=-2ax$…②

（ト）　①式と②式から，

$-2(-\dfrac{F}{m})x=v^2 \Leftrightarrow Fx=\dfrac{1}{2}mv^2$

※左辺が表すものは，物体が箱に対してした仕事に等しいので，物体はこれだけの仕事量，つまり，エネルギーを持っていると言える。

6

(1)　運動方程式（$ma=f$）より，

$ma=F$

(2)　(1) の答えを式変形して，

$a=\dfrac{F}{m}$

(3)　（$v^2-v_0{}^2=2aS$）より，

$v^2-v_0{}^2=2ax \Leftrightarrow v^2-v_0{}^2=2\dfrac{F}{m}x$

(4)　(3) で得られた式の両辺を $\dfrac{m}{2}$ 倍すると，

$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0{}^2=Fx$

これより，運動エネルギーの変化が物体がされた仕事に等しい（エネルギーの原理）ことが示された。

7

(1)　位置エネルギー
(2)　U
(3)　重力は常に鉛直下向きで，鉛直下向きに移動距離は h なので，(仕事＝力× 距離）より，重力のした仕事は $\underline{mgh}$[N]となる。
※高いところにある物体は，落下時に重力が仕事をすることができる。すなわち，その仕事量の分だけエネルギーを持っていると言える。

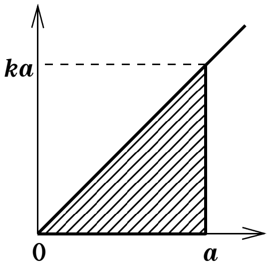
8

(1)　弾性力による位置エネルギー，弾性エネルギー

(2)　U

(3)　($f=kx$)より，$\underline{kx}$[N]

(4)



(6)　今回も **1** (6)と同様に，力が弾性力となり一定ではないので，公式（仕事＝力× 距離）を使用できない。このため，縦軸を力 f，横軸を距離 x とした（$f-x$）図の面積が仕事に等しいことを用いる。右図の斜線部の面積が仕事となることから，

$\frac{1}{2}ka^2$[J]

※伸びている，または，縮んでいるばねは，自然長にもどるときに弾性力が仕事をすることができる。すなわち，その仕事量の分だけエネルギーを持っていると言える。

9

(1)　$K=\frac{1}{2}mv^2$

m：質量[kg]
v：速さ[m/s]

(2)　$U=mgh$

m：質量[kg]
g：重力加速度[m/s^2]
h：基準点からの高さ[m]

(3)　$U=\frac{1}{2}kx^2$

k：ばね定数[N/m]
x：自然長からの伸びまたは縮み[m]

10

(1)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，高さの基準点を点Ｂ，点Ｂでの物体の速さを v として，

$0+mgl=\frac{1}{2}mv^2+0$

計算すると，

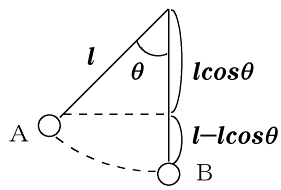
$v=\sqrt{2gl}$

(2)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，高さの基準点を点Ｂ，点Ｂでの物体の速さを v として，

$0+mgl(1-co\theta)=\frac{1}{2}mv^2+0$

計算すると，

$v=\sqrt{2gl(1-cos\theta)}$



(3)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，高さの基準点を点B，点Bでの物体の速さを v として，

$$0+mgs\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2+0$$

計算すると，

$$v=\sqrt{2gs\sin\theta}$$

(4)　水平方向の速さは変わらないので，点Bでの速さ $v\cos\theta$ である。力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，高さの基準点を点Aとして，

$$\frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2+0$$

計算すると，

$$h=\frac{v^2(1-\cos^2\theta)}{2g}=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$$

※数学公式（$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$）を利用した。

(5)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，点Bでの物体の速さを v として，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+\frac{1}{2}kl^2$$

計算すると，

$$v=l\sqrt{\frac{k}{m}}$$

11

(1)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，高さの基準点を点B，点Bでの物体の速さを v として，

$$0+mgl=\frac{1}{2}mv^2+0$$

計算すると，

$v=\sqrt{2gl}$ [m/s]

(2)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，高さの基準点を点C，点Cでの物体の速さを V として，

$$0+mg(h+l)=\frac{1}{2}mV^2+0$$

計算すると，

$V=\sqrt{2g(h+l)}$ [m/s]

(3)　点Bから点Cまで到達するのにかかる時間を t として，鉛直方向の運動に注目して，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$h=\frac{1}{2}gt^2\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

水平方向の運動に注目して，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$v\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{hl}$ [m]

12

(1)　力のつり合いより，

$kl=mg\Leftrightarrow l=\frac{mg}{k}$ [m]

(2)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，位置エネルギーが重力によるものと弾性力によるものの２種類あることに注意して，

$$\frac{1}{2}mv^2+(0+\frac{1}{2}kl^2)=0+(mgl+0)$$

(3)　(1) で求めた式を，(2) で求めた式に代入して，

$$\frac{1}{2}mv^2+(0+\frac{1}{2}kl^2)=0+(kl^2+0)\Leftrightarrow v=l\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(4)　折り返し地点では速さが 0 となるので，この時のばねの伸びを x，この位置を高さの基準点とすると，ばねが自然長における物体の基準点からの高さは x となる。折り返し地点と自然長時での力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$0+(0+\frac{1}{2}kx^2)=0+(mgx+0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}kx(x-\frac{2mg}{k})=0$$

$$\Leftrightarrow x=0,\ \frac{2mg}{k}(=2l)$$

したがって，ばねの伸びは $\frac{2mg}{k}(=2l)$ となる。

13

(1)　斜面平行方向について，力のつり合いより，

$$ka=mgsin\theta \Leftrightarrow a=\frac{mgsin\theta}{k}\ [\mathrm{m}]$$

(2)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，位置エネルギーが重力によるものと弾性力によるものの２種類あることに注意して，

$$\frac{1}{2}mv^2+(0+\frac{1}{2}ka^2)=0+(mgasin\theta+0)$$

(3)　(1) で求めた式を，(2) で求めた式に代入すると，

$$\frac{1}{2}mv^2+(0+\frac{1}{2}ka^2)=0+(ka^2+0)\Leftrightarrow v=a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(4)　折り返し地点では速さが 0 となるので，この時のばねの伸びを x，この位置を高さの基準点とすると，ばねが自然長における物体の基準点からの高さは x となる。折り返し地点と自然長時での力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

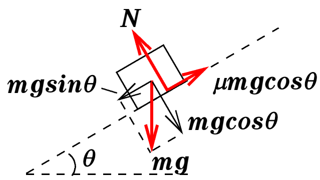
$$0+(0+\frac{1}{2}kx^2)=0+(mgxsin\theta+0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}kx(x-\frac{2mgsin\theta}{k})=0$$

$$\Leftrightarrow x=0,\ \frac{2mgsin\theta}{k}(=2a)$$

したがって，ばねの伸びは $\frac{2mgsin\theta}{k}(=2a)$ となる。

14



(1)　点Ａ：$mglsin\theta$ [J]，点Ｂ：$\frac{1}{2}mv^2$[J]

(2)　垂直抗力を N とすると，斜面垂直方向の力のつり合いより，
$N=mgcos\theta$
摩擦力の式（$f=\mu N$）より，摩擦力の大きさは$\mu mgcos\theta$ となる。摩擦力は進行方向と反対向きに働いているで，摩擦力のする仕事は負となり，（仕事＝力× 距離）より，
$-\mu mglcos\theta$ [J]

(3)　力学的エネルギーの変化は保存力以外の力がした仕事に等しいことから，

$$\frac{1}{2}mv^2-mgl\sin\theta=-\mu mgl\cos\theta \Leftrightarrow v=\sqrt{2gl(\sin\theta-\mu\cos\theta)}\ \ [\mathrm{m/s}]$$

15

(1)　点Ａ：$\frac{1}{2}ka^2$[J]，点Ｂ：$\frac{1}{2}kb^2$[J]

(2)　垂直抗力を N とすると，鉛直平行方向の力のつり合いより，

$N=mg$

摩擦力の式（$f=\mu N$ ）より，摩擦力の大きさはμmgとなる。摩擦力は進行方向と反対向きに働いているで，摩擦力のする仕事は負となり，（仕事＝力× 距離）より，

$-\mu mg(a+b)$ [J]

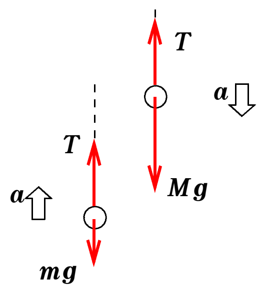
(3)　力学的エネルギーの変化は保存力以外の力がした仕事に等しいことから，

$$\frac{1}{2}kb^2-\frac{1}{2}ka^2=-\mu mg(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k(b-a)(b+a)=-\mu mg(a+b)$$

$$\Leftrightarrow b=a-\frac{2\mu mg}{k}\,[\mathrm{m}]$$

16



(1)　物体Ａと物体Ｂに働く力は図のようになるので，それぞれで設定した加速度の向きを正として，運動方程式（$ma=f$）を立てると，

物体Ａ：$ma=T-mg$…①

物体Ｂ：$Ma=Mg-T$…②

①式と②式を足して，

$$(m+M)a=(M-m)g \Leftrightarrow a=\frac{M-m}{m+M}g\ [\mathrm{m/s^2}]$$

(2)　物体Ａ：$2mgh$[J]，点Ｂ：$-2Mgh$[J]

(3)　力学的エネルギーの変化は保存力以外の力がした仕事に等しいことから，張力の大きさを T，求める速さを v とすると，

物体Ａ：$\frac{1}{2}mv^2+2mgh-(0+0)=T\times 2h$…①

物体Ｂ：$\frac{1}{2}Mv^2+0-(0+2Mgh)=-T\times 2h$…②

①式と②式の辺々を足すと，

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2-2(M-m)gh=0 \Leftrightarrow v=2\sqrt{\frac{(M-m)gh}{m+M}}\ \ [\mathrm{m/s}]$$

※(1)で求めた加速度を用いて，（$v^2-v_0^2=2aS$）を用いても計算できる。

□■物理的思考■□

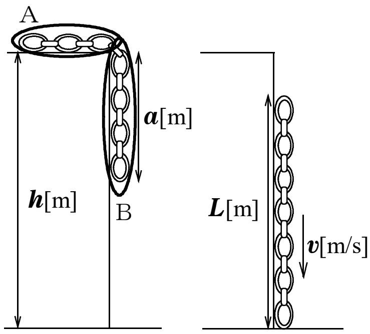
①式および②式から物体Ａだけ，または，物体Ｂだけでは力学的エネルギーが保存されていないことが分かる。しかし，物体Ａと物体Ｂの合計の力学的エネルギーで考えると，張力がした仕事が相殺されるので，保存されていることが分かる。したがって，物体Ａと物体Ｂについて，合計の力学的エネルギーが保存されることを用いて計算してもよい。

17

（図１）での鎖の位置エネルギーを求めたいが，高さをどのようにとればいいかが問題になってくる。ここで，図のように鎖をＡとＢの２つに分けて考える。基準点を床とすると，Ａの高さは h となる。また，Ｂの高さは，重心位置で考えて，$h-\frac{a}{2}$ となる。それぞれの質量から，ＡとＢの位置エネルギーは，

Ａ：$\frac{(L-a)m}{L}gh$

Ｂ：$\frac{am}{L}g(h-\frac{a}{2})$



（図１）　（図２）

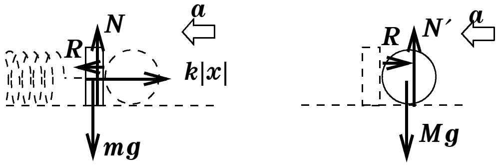
（図２）での鎖の位置エネルギーは重心位置から考えて，$mg\frac{L}{2}$ となっている。求める速さを v として，力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，

$$(0+\frac{(L-a)m}{L}gh)+(0+\frac{am}{L}g(h-\frac{a}{2}))=\frac{1}{2}mv^2+mg\frac{L}{2}$$

$$\Leftrightarrow v=\sqrt{\frac{g}{L}(2hL-a^2-L^2)}$$

18

(1)　物体Ａと物体Ｂに働く力は図のようになるので，ばねが縮む方向の加速度 a を設定して，運動方程式（$ma=f$）を立てると，



板：$ma=-k|x|+R \Leftrightarrow ma=-kx+R$…①

小球：$Ma=-R$…②

(2)　①式と②式を足して，

$$(m+M)a=-kx \Leftrightarrow a=-\frac{kx}{m+M}$$

これに②式に代入して，

$R=\frac{kMx}{m+M}$　[N]

(3)　小球と板が離れるとお互いが押し合うことができないので，R が 0 の時に離れる。(2)の答えより，

$$-\frac{kMx}{m+M}=0 \Leftrightarrow x=0$$

※このような問題ではばねが自然長（$x=0$）で物体が離れることが多い。

(4)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，小球が板から離れる（ばねが自然長）時の物体の速さを v として，

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2+0=0+\frac{1}{2}kl^2$$

計算すると，

$v=l\sqrt{\frac{k}{m+M}}$　[m/s]

(5)　力学的エネルギー保存則（$K+U=$一定）より，点Ｂの物体の速さを v' として，

$$\frac{1}{2}mv'^2+mgR=0+\frac{1}{2}mv^2$$

計算すると，

$v'=\sqrt{v^2-2gR}$ [m/s]

(6)　力学的エネルギー保存則（$\boldsymbol{K+U}$=一定）より，最高点の物体の地面からの高さを $\boldsymbol{h}$ として，

$$0+mgh=\frac{1}{2}mv^2+0 \Leftrightarrow h=\frac{v^2}{2g}\ [\mathrm{m}]$$

□■物理的思考■□

力学的エネルギー保存則を使う問題を解いていると，保存則が成り立つ場合と成り立たない場合の区別かつかなくなることが多い。どういう場合で保存則が崩れてしまうのかをしっかりと把握しておきたい。保存力はした仕事の分だけ，物体にエネルギーとして蓄えるもので，保存力としては重力（万有引力）やクーロン力などが挙げられる。保存力の定義は難しいので，これらの力が保存力だと覚えておけばいい。さて，これら以外の力が仕事をした場合は，保存力ではないので，物体にエネルギーとして蓄えられない。つまり，力学的エネルギーが減ったり増えたりするわけである。したがって，簡単に力学的エネルギー保存則で計算できる問題であったとしても，力をしっかり描き，どの力が仕事をするかしないかを見極めていく必要がある。