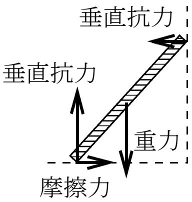
物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

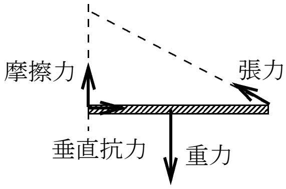
No.7
剛体のつりあい編
ブツリヨキワメヨ

1

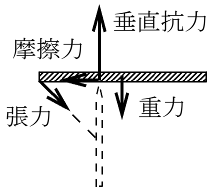
(1)



(2)



(3)



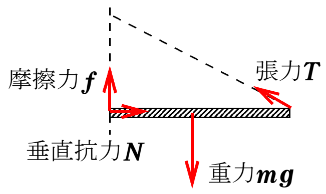
【力の見つけ方】
①注目する物体を実線で描く。
②①に触れているモノだけを点線で描く。
※触れているモノからしか力は受けないので，関係ないものは描かない。
③重力を描く。
④②から受ける力を描く。
※作用点はモノと物体が触れている点。

2

(1)　反時計回りに $\boldsymbol{50}$[N]　(2)　反時計回りに $\boldsymbol{20}$[N]　(3)　時計回りに $\boldsymbol{10}$[N]
(4)　時計回りに $\boldsymbol{30}$[N]　(5)　時計回りに $\boldsymbol{20}$[N]　(6)　時計回りに $\boldsymbol{10}$[N]
(7)　反時計回りに $\boldsymbol{20\sqrt{2} \to 2.8\times 10}$[N]　(8)　反時計回りに $\boldsymbol{20}$[N]
(9)　反時計回りに $\boldsymbol{20\sqrt{3} \to 3.5\times 10}$[N]　(10)　反時計回りに $\boldsymbol{af+(a+b)F}$[N]
(11)　時計回りに $\boldsymbol{bF}$[N]　(12)　反時計回りに $\boldsymbol{aF\sin\theta}$
(13)　時計回りに $\boldsymbol{\frac{mgl}{2\sqrt{2}}}$[N]　(14)　反時計回りに $\boldsymbol{\frac{Rl}{\sqrt{2}}}$[N]　(15)　時計回りに $\boldsymbol{\frac{Nl}{\sqrt{2}}}$[N]
(16)　反時計回りに $\boldsymbol{\frac{mgl}{2\sqrt{2}}}$[N]　(17)　反時計回りに $\boldsymbol{\frac{fl}{\sqrt{2}}}$[N]　(18)　時計回りに $\boldsymbol{Nl}$[N]
(19)　反時計回りに $\boldsymbol{\frac{mgl}{2}}$[N]　(20)　反時計回りに $\boldsymbol{\frac{T}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}\,l}{2}-\frac{T}{\sqrt{2}}\times\frac{l}{2}}$[N]
(21)　時計回りに $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\,mgl}{4}}$[N]　(22)　時計回りに $\boldsymbol{\frac{mgl\cos\theta}{2}}$[N]　(23)　反時計回りに $\boldsymbol{Rl\sin\theta}$[N]
(24)　時計回りに $\boldsymbol{Nl\cos\theta}$[N]　(25)　反時計回りに $\boldsymbol{\frac{mgl\cos\theta}{2}}$[N]　(26)　反時計回りに $\boldsymbol{fl\sin\theta}$[N]

3

(1)



(2)　T だけを水平方向と鉛直方向に分解して，

①鉛直方向の力のつり合い：$f+T\sin\theta=mg$

②水平方向の力のつり合い：$N=T\cos\theta$

③力のモーメントのつり合い：$mg\times\dfrac{l}{2}=T\sin\theta\times l$

(3)　(2)の３式から計算すると，

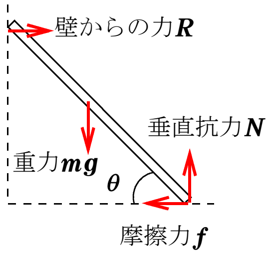
$T=\dfrac{mg}{2\sin\theta}$，$N=\dfrac{mg}{2\tan\theta}$，$f=\dfrac{mg}{2}$

(4)　静止摩擦係数を μ とすると，棒が滑らない条件は，（$f\leqq\mu N$）より，

$\dfrac{mg}{2}\leqq\mu\dfrac{mg}{2\tan\theta}\Leftrightarrow\tan\theta\leqq\mu$

4

(1)



(2)

①鉛直方向の力のつり合い：$N=mg$

②水平方向の力のつり合い：$R=f$

③力のモーメントのつり合い：$mg\cos\theta\times\dfrac{l}{2}=R\sin\theta\times l$

(3)　(2)の３式から計算すると，

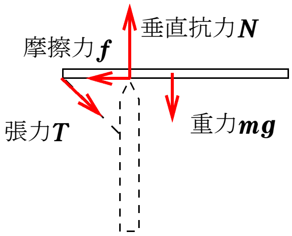
$N=mg$，$R=f=\dfrac{mg\cos\theta}{2\sin\theta}=\dfrac{mg}{2\tan\theta}$

(4)　静止摩擦係数を μ とすると，棒が滑らない条件は，（$f\leqq\mu N$）より，

$\dfrac{mg}{2\tan\theta}\leqq\mu mg\Leftrightarrow\tan\theta\geqq\dfrac{1}{2\mu}$

5

(1)



$\frac{r}{2}$

(2)　T だけを水平方向と鉛直方向に分解して，

①鉛直方向の力のつり合い：$N=T\cos\theta+mg$

②水平方向の力のつり合い：$f=T\sin\theta$

③力のモーメントのつり合い：$mg\times\left(\frac{b}{2}-a\right)=T\cos\theta\times a$

$\frac{r}{2}-y$

(3)　(2)の３式から計算すると，

$$T=\frac{mg(b-2a)}{2a\cos\theta},\quad f=\frac{mg(b-2a)\tan\theta}{2a},\quad N=\frac{mgb}{2a}$$

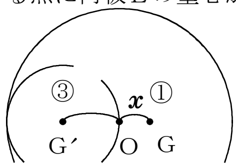
6

(1)　円板Ｂの半径は円板Ｃの半分なので，相似比より，面積が$\frac{1}{4}$倍になる。また，円板Ｃは円板Ａの質量から円板Ｂの質量を引いたものに等しいから，

円板Ｂ：$\frac{m}{4}$，円板Ｃ：$\frac{3m}{4}$

(2)　円板Ｃの重心を直接求めることは難しいので，円板Ａの重心と，円板Ｂと円板Ｃを合わせた円板の重心が一致することから求める。円板Ｃに円板Ｂを戻した円板を円板Ｅとする。円板Ａの重心は中心にあり，円板Ｅは円板Ｂと円板Ｃの重心から求めることができる。円板Ｃの重心を中心Ｏから右に x[m]の点Ｇにあるとすると，円板Ｂの重心を G′として，線分 GG′を $1:3$ に内分する点に円板Ｅの重心がある。これが円板Ａの重心と等しくなることから，

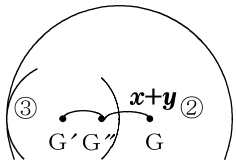
$$x=\frac{\mathrm{OG'}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{r}{2}=\frac{r}{6}$$



したがって，中心Ｏから右に$\frac{r}{6}$の場所に重心がある。

(3)　円板Ｄの重心も中心にあり，これを円板Ｃのくり抜かれた部分に入れると，２物体の中心から左にずれた位置Ｇ″に重心がくる。一方，円板Ｃの重心Ｇは(2)で求めた通りである。円板Ｃと円板Ｄのそれぞれの重心位置と質量より，２物体の重心は線分 GG′を $2:3$ に内分する点にくる。以上より，２物体の重心を中心から左に y[m]とすると，

$$\left(\frac{r}{2}-y\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{r}{6}+y\right)\Leftrightarrow y=\frac{r}{10}$$



したがって，中心Ｏから左に$\frac{r}{10}$の場所に重心がある。

7

Ｂ端に力を加えて持ち上げるとき，Ａを支点として力のモーメントのつり合いが保たれている。同様に，Ａ端に力を加えて持ち上げるときも，Ｂを支点として力のモーメントのつり合いが保たれている。棒の重心の位置をＡから右に x[m]，重さを W[N]とすると，

Ｂ端に力を加えたとき：$xW=lF_1$…①

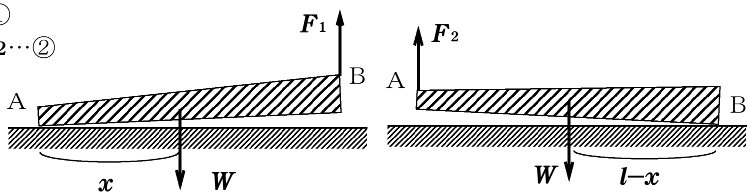
Ａ端に力を加えたとき：$(l-x)W=lF_2$…②

①式と②式の辺々を足すことより，

$W=F_1+F_2$

また，求めた W を①に代入して，

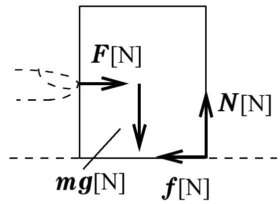
$x=\dfrac{F_1 l}{F_1+F_2}$



したがって，重さ$\underline{F_1+F_2}$で点Ａから点Ｂに向かって$\underline{\dfrac{F_1 l}{F_1+F_2}}$の場所に重心がある。

8

(1)　「力の見つけ方」にしたがって力を描くと右図のようになる。ただし，倒れる寸前を表しており，床からの力（垂直抗力と摩擦力）の作用点は直方体と床が唯一触れている回転の軸（物体の右端）となっている。それぞれの力の値は，力のつり合いより，



水平方向：$f=F$
鉛直方向：$N=mg$

静止摩擦係数を μ とすると，棒が滑る条件は，（$f>\mu N$）より，

$F>\mu mg$

(2)　直方体が倒れるときは床と直方体が最後に触れている点（この点をＡとする）を軸にして回転し始めるときとなる。したがって，点Ａを支点とした時計回りの力のモーメントが反時計回りの力のモーメントより大きくなった時となる。

（時計回りの力のモーメント）＞（反時計回りの力のモーメント）

$F\times a>mg\times b$

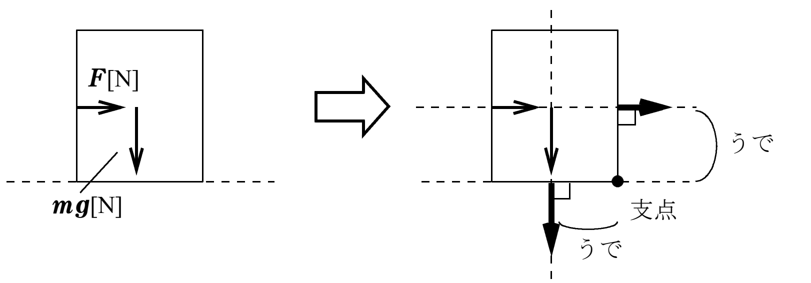
$\Leftrightarrow F>\dfrac{mgb}{a}$

(3)　直方体が傾くことなく滑り出す条件が(1)で，滑り出すことなく傾く条件が(2)なので，F の値を大きくしていって，滑り出すことなく傾くためには，

$\dfrac{mgb}{a}<\mu mg \Leftrightarrow \mu>\dfrac{b}{a}$

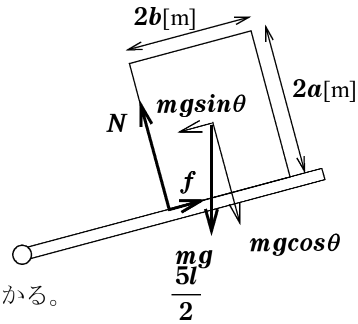
【作用線の定理】

力のモーメントを計算するのに，（うで）×（力のうでに対して垂直な成分）から計算したが，作用線の定理を使うと便利である。作用線の定理とは，「同一作用線上なら作用点を動かしても力の効果は変わらない」といったもので，これを用いることで，力をうでと垂直となる場所まで移動できる（下図）。こうすることで，力のモーメントを力を分解することなく，（力）×（うで）より計算できる。



9

(1)　物体に働く力を描くと右図のようになる。ただし，図は倒れる寸前を表しており，床からの力（垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ と摩擦力 $\boldsymbol{f}$）の作用点は直方体と床が唯一触れている回転の軸（物体の左端）となっている。重力を斜面に対して平行な方向と垂直な方向に分解することで，力のつり合いの式を立てることができる。



斜面平行：$N=mg\cos\theta$
斜面垂直：$f=mg\sin\theta$

(2)　θ_1 の時に滑り始めるので，摩擦力が最大摩擦力（$f=\mu N$）の時と分かる。
$mg\sin\theta_1=\mu mg\cos\theta_1 \Leftrightarrow \tan\theta_1=\mu$

(3)　倒れる直前は，物体の左端しか板に触れていないので，この点（Aとする）を回転の軸として反時計回りに回転する。倒れ始め（回転し始め）は点Aを支点とした時計回りの力のモーメントと反時計回りの力のモーメントが等しいと考えられるので，

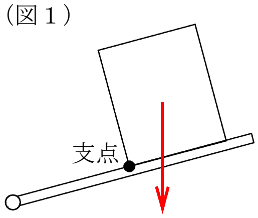
$$mg\cos\theta_2\times b=mg\sin\theta_2\times a \Leftrightarrow \tan\theta_2=\frac{b}{a}$$

※垂直抗力と摩擦力の作用点は支点上にあるので力のモーメントを持たない。したがって，重力のモーメントだけ考えればよい。このとき，重力の分解した２力を時計回り（$mg\cos\theta$）と反時計回り（$mg\sin\theta$）に分けて考えた。

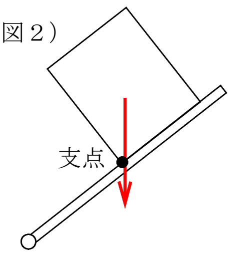
□■物理的思考■□

倒れる寸前を考えると，垂直抗力と摩擦力の作用点は支点（回転の軸）上にあるので力のモーメントを持たない。このことから，モーメントを持つのは重力のみとなる。したがって，重力が反時計回りのモーメントを持つなら倒れ，時計回りのモーメントを持つなら倒れないということになる。この分かれ目については下図から考えると分かりやすい。（図１）では時計回り，（図３）では反時計回りになることは一目瞭然である。したがって，境目となる（図２）が倒れる寸前となる。なお，（図２）より $\tan\theta_2$ はすぐに計算できる。

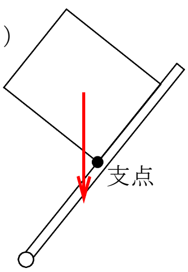
（図１）



（図２）



（図３）

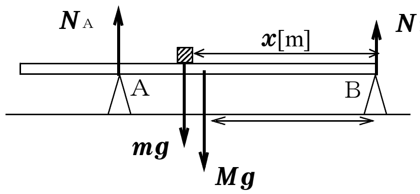


10

(1)　剛体のつりあい問題は力のつり合いと力のモーメントのつり合いの２式を立てることで解答できる。棒に働く力のつり合いは，

$N_A+N_B=mg+Mg$

点Ｂまわりの力のモーメントのつり合いは，（反時計回りの力のモーメント）＝（時計回りの力のモーメント）より，



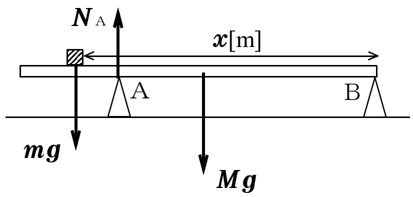
$$Mg\times\frac{5l}{2}+mg\times x=N_A\times 4l$$

この２式を計算すると，

$$N_A=\frac{(5Ml+2mx)g}{8l},\quad N_B=\frac{(3Ml+2m(4l-x))g}{8l}$$

(2)　倒れる直前は，棒は点Ａでしか触れていないので，この点を回転の軸として反時計回りに回転する。倒れ始め（回転し始め）は点Ａを支点とした時計回りの力のモーメントと反時計回りの力のモーメントが等しいと考えられるので，

$$mg\times(x-4l)=Mg\times\frac{3l}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3M+8m}{2m}l$$



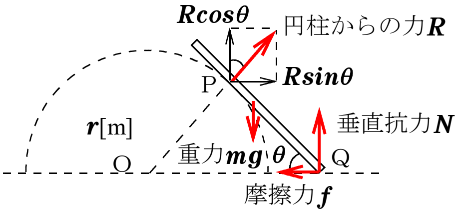
□■物理的思考■□
倒れる寸前を考えると，点Ｂで棒と支点が触れていない。したがって，N_Bが 0 となる。このことと(1)の結果を用いて解いても構わない。

(3)　(2)の答えを用いると，求めた長さが $5l$ 以上であれば，棒がひっくりかえる時の物体の位置が棒上にないことになる。したがって，棒が倒れることはない。これより，

$$\frac{3M+8m}{2m}l>5l \Leftrightarrow M>\frac{2}{3}m$$

11

(1)　水平面はあらいので，棒は点Ｑから垂直抗力と摩擦力を受ける。一方で，半円柱はなめらかなので，棒は点Ｐから垂直抗力のみを受ける。この力は半円柱の面に対して垂直なので，作用線が半円柱の中心Ｏを通っている。



(2)

①鉛直方向の力のつり合い：$N+R\cos\theta=mg$

②水平方向の力のつり合い：$f=R\sin\theta$

③力のモーメントのつり合い：$R\times\dfrac{r}{\tan\theta}=mg\cos\theta\times\dfrac{l}{2}$

※ＰＱ間の長さは，△ＯＰＱに注目すると，$\tan\theta=\dfrac{OP}{PQ}\Leftrightarrow PQ=\dfrac{r}{\tan\theta}$ と求まる。

(3)　(2)の３式から計算すると，

$$R=\frac{mgl\sin\theta}{2r},\quad f=\frac{mgl\sin^2\theta}{2r},\quad N=\frac{mg(2r-l\sin\theta\cos\theta)}{2r}$$

(4)　静止摩擦係数を μ とすると，棒が滑らない条件は，（$f \leqq \mu N$）より，

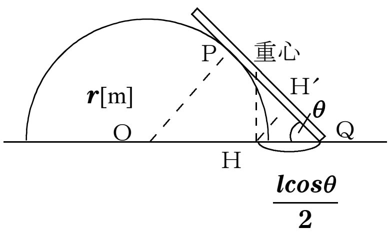
$$\frac{mgl\sin^2\theta}{2r} \leqq \mu\frac{mg(2r-l\sin\theta\cos\theta)}{2r} \Leftrightarrow \mu \geqq \frac{l\sin^2\theta}{2r-l\sin\theta\cos\theta}$$

□■物理的思考■□

　垂直抗力の値を考慮する。(3)で求めた点Qにおける垂直抗力は負の値をとるときが考えられる。ここでの垂直抗力が負になるときは，点Q，つまり，水平面から棒が離れることが考えられ，これは点Pを回転の軸として倒れていることに他ならない。これは，棒が長いときに起こることは容易に想像できると思う。では，点Pを回転の軸として倒れる，倒れないの境目は何なのかを考えてみる。(3)より，N の値が 0 となるのは，

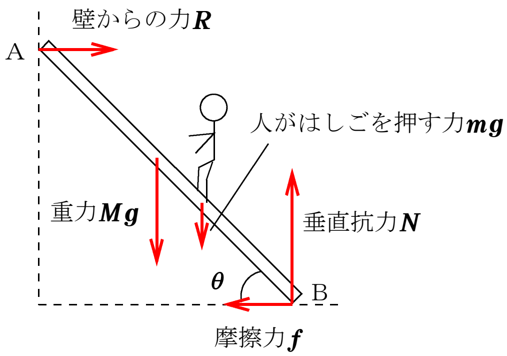
$$2r-l\sin\theta\cos\theta=0 \Leftrightarrow r=\frac{l\sin\theta\cos\theta}{2}$$

を満たす時である。この右辺の値は棒の中心から水平面に下ろした垂線の足を点Hとして，点Hから棒に下ろした垂線の足をH′とすると，HH′に等しくなる。OPが r と等しいことから考えて，式を満たすのは，棒の重心が半円柱の中心Oの真上にあるときと分かる。（※解答では，垂直抗力の値が正になるものとして解いている。）



12

(1)



(2)

①鉛直方向の力のつり合い：$N=mg+Mg$

②水平方向の力のつり合い：$f=R$

③力のモーメントのつり合い：$R\sin\theta \times l=mg\cos\theta \times x+Mg\cos\theta \times \frac{l}{2}$

(3)　(2)の３式から計算すると，

$$N=(m+M)g,\ f=R=\frac{2mx+Ml}{2l\tan\theta}g$$

(4)　静止摩擦係数を μ とすると，棒が滑り始める条件は，（$f > \mu N$）より，

$$\frac{2mx+Ml}{2l\tan\theta}g>\mu(m+M)g \Leftrightarrow x>\frac{2\mu(m+M)l\tan\theta-Ml}{2m}$$

すべり始める x の値が分かったので，この値が棒の長さ l より大きければよいので，

$$\frac{2\mu(m+M)l\tan\theta-Ml}{2m} \geqq l \Leftrightarrow \mu \geqq \frac{2m+M}{2(m+M)\tan\theta}$$

※人が棒上の点Bから点Aまでを移動するときなので，x の値が決まっていない。0 から l までの範囲で滑らないための条件を考えないといけないので，滑り始める x の位置を求め，それが棒上にないことで滑り始める位置がない，つまり，滑らないと考えた。