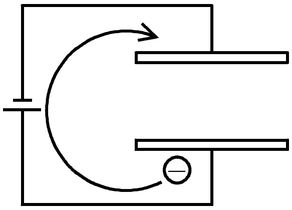
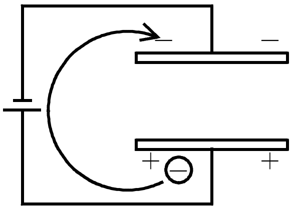
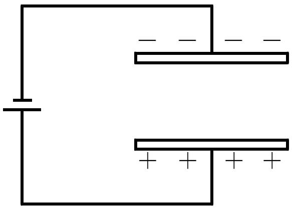
４．電磁気
４．２　コンデンサー
①　コンデンサー
　コンデンサーは下の図のように，２枚の金属板を並べたもので，電気を蓄えたり，放電したりできます。電気を蓄えていないコンデンサーを電池につなぐと，電気が流れてコンデンサーの極板に電気が蓄えられます。少しでもコンデンサーに電気が蓄えられると，導線内を進む自由電子は極板に蓄えられた電荷から反対向きのクーロン力を受け進みにくくなります。つまり，コンデンサーに電気が蓄えられるほど，電流は流れにくくなります。最終的に，コンデンサーの電圧と電池の電圧が等しくなると電流が流れなくなり，コンデンサーの充電が完了します。



　電池の電圧（電位差）によって電場が生じ、金属板内の自由電子が時計回りに移動する。自由電子が移動することで，コンデンサーの上の極板は負に，下の極板は正に帯電する。



　コンデンサーに電気が蓄えられると、自由電子は負の極板へと向かうことになります。クーロン斥力を受け、進みにくくなります。



　電池の電圧とコンデンサーの電圧が等しくなると，電位の差が無くなり電流が流れなくなります。

　コンデンサーにかかる電圧を V，コンデンサーに蓄えられる電気量を Q とします。電気が蓄えられるほど電圧（電位差）が大きくなることは自明ですので，Q と V は比例関係にあります。比例定数を C とすると，次の関係式が成り立ちます。

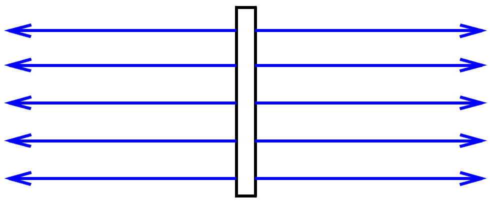
$$\boxed{Q=CV}$$

　をコンデンサーの**電気容量**（**静電容量**）といいます。単位は[**F**（ファラド）]または[C/V]です。

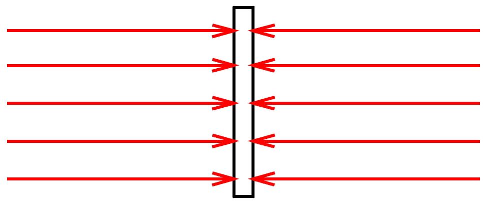
☐ pick up words
・電気容量
・[F（ファラド）]

② 電気容量

電気容量を求めてみましょう。前節の⑨でガウスの法則を学び，$\boldsymbol{Q}$[C]の電荷からは誘電率 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を用いて $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本]の電気力線が出ていることが分かりました。同様に，$\boldsymbol{-Q}$[C]の電荷からは誘電率 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を用いて $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本]の電気力線が入っていることが分かります。面積が S[m^2]で $\boldsymbol{Q}$[C]の電気が一様に分布した極板と $\boldsymbol{-Q}$[C]の電気が一様に分布した極板を考えます。このとき，２つの極板に出入りする電気力線は次のようになります。

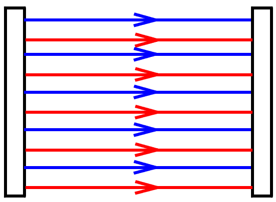


$+\boldsymbol{Q}$に帯電



$-\boldsymbol{Q}$に帯電

この２つの極板をお互いが向き合うようにして置くと，反対向きの電気力線は打ち消し合い，次のようになります。



$+\boldsymbol{Q}$ $-\boldsymbol{Q}$

極板間には正の極板からは半分の（　１　）[本]，負の極板からは半分の（　２　）[本]で合計 $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$[本]の電気力線が存在しています。電場の強さが $\boldsymbol{E}$ の場所では単位面積当たり $\boldsymbol{E}$[本]の電気力線を引くので，電場の強さは（　３　）[V/m]と分かります。電気力線の本数密度は同じなので一様な電場ができているので，($\boldsymbol{V=Ed}$) より，極板間には $\boldsymbol{V}=$（　４　）[V]の電圧が生じていることが分かります。これを式変形すると，

$$\boxed{\boldsymbol{Q=\frac{\varepsilon S}{d}V=CV},\ \boldsymbol{C=\frac{\varepsilon S}{d}}}$$

となり，$\boldsymbol{Q}$ が $\boldsymbol{V}$ に比例していることが分かります。この比例定数を電気容量といい，$\boldsymbol{C}$ を用いて表します。

１：$\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}$　２：$\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}$　３：$\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon S}}$　４：$\dfrac{\boldsymbol{Qd}}{\boldsymbol{\varepsilon S}}$

電気容量の単位は[**F**（ファラド）]でμ（マイクロ），n（ナノ），p（ピコ）等を使って表すこともあります。それぞれ，$\mathbf{10^{-6}}$倍，$\mathbf{10^{-9}}$倍，$\mathbf{10^{-12}}$倍を表すもので，次のような関係式になります。

$$\mathbf{1}[\mu\mathrm{F}]=\mathbf{10^{-6}}[\mathrm{F}],\ \mathbf{1}[\mathrm{nF}]=\mathbf{10^{-9}}[\mathrm{F}],\ \mathbf{1}[\mathrm{pF}]=\mathbf{10^{-12}}[\mathrm{F}]$$

真空の誘電率に対する比で誘電率の大きさを表すものを比誘電率と言います。比誘電率は真空の誘電率に比べて何倍かを表したものなので，物質の誘電率を ε，比誘電率を ε_r，真空の誘電率を ε_0 とすると以下の式が成り立ちます。

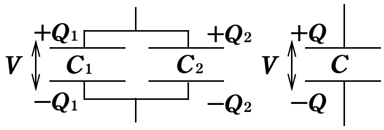
$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$$

<u>比誘電率は誘電率ではない</u>ので注意しましょう。

☐ pick up words
・$\boldsymbol{Q}$[C]の電荷から出る電気力線の本数
・電場と電気力線の本数
・($\boldsymbol{V=Ed}$)

③　合成容量

　コンデンサーを直列や並列に並べたとき，それらのコンデンサーを１つにして考えたごきの電気容量を合成容量と言います。まずは，簡単な並列の場合から考えてみましょう。次の図のように，電気容量が $\boldsymbol{C_1}$ と $\boldsymbol{C_2}$ のコンデンサーが並列につながれている場合を考えます。



　互いのコンデンサーの上部と下部では導線でつながれているため等電位となっています。($\boldsymbol{Q=CV}$) より，コンデンサーにかかる電圧を $\boldsymbol{V}$ とすると，それぞれのコンデンサーに蓄えられている電気量 $\boldsymbol{Q_1}$, $\boldsymbol{Q_2}$ は，

$$\boldsymbol{Q_1=C_aV},\ \boldsymbol{Q_2=C_2V}\cdots①$$

となります。したがって，２つのコンデンサーを合成したコンデンサーが蓄えている電気量 $\boldsymbol{Q}$ は，

$$\boldsymbol{Q=Q_1+Q_2}\cdots②$$

となるので，①式と②式より，

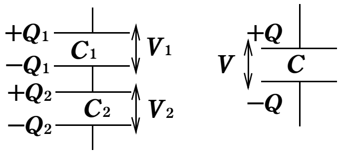
$$\boldsymbol{Q=(C_1+C_2)V}\cdots③$$

と変形できるので，合成容量 $\boldsymbol{C}$ は，

$$\boxed{\boldsymbol{C=C_1+C_2}}$$

となることが分かります。

次に直列の場合を考えます。次の図のように，電気容量が C_1 と C_2 のコンデンサーが直列につながれている場合を考えます。



このとき，C_1 の上部と C_2 の下部が合成したコンデンサーの極板部分に相当しています。したがって，合成したコンデンサーが蓄えている電気量を Q とすると，C_1 と C_2 のコンデンサーが蓄える電気量も Q となっていることが分かります。($Q=CV$) より，それぞれのコンデンサーにかかっている電圧 V は，

$$V=\frac{Q}{C},\ V_1=\frac{Q}{C_1},\ V_2=\frac{Q}{C_2}\cdots④$$

となります。また，電圧の関係式から，

$$V=V_1+V_2\cdots⑤$$

となります。④式と⑤式から整理すると，

$$V=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)Q$$

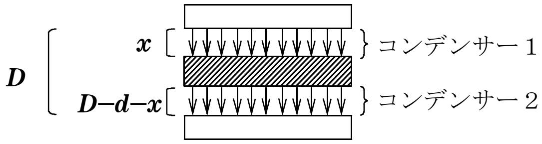
と変形できるので，合成容量 C が，

$$\boxed{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\Leftrightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}$$

となることが分かります。

④　導体の挿入

電気容量 $\boldsymbol{C}$ $\left(=\dfrac{\varepsilon S}{D}\right)$ のコンデンサーに極板と面積が等しく，厚さ $\boldsymbol{d}$ の導体を挿入します。静電誘導によって，導体内の電場は打ち消され，コンデンサー内には次のような電気力線が生じています。

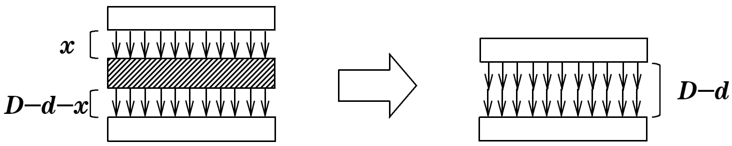


このとき，コンデンサー１とコンデンサー２が直列に繋がれていると考えることができます。コンデンサー１と２の電気容量は $\left(C=\dfrac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，それぞれ $\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}$，$\dfrac{\varepsilon_0 S}{D-d-x}$ となるので，合成容量 $\boldsymbol{C'}$ は，

$$\frac{1}{C'}=\frac{x}{\varepsilon_0 S}+\frac{D-d-x}{\varepsilon_0 S}=\frac{D-d}{\varepsilon_0 S}\Leftrightarrow C'=\frac{\varepsilon_0 S}{D-d}=\frac{d}{D-d}C$$

となります。

次の図のように，導体部分をそのまま引っこ抜いて考えたときの電気容量を考えてみます。



このときの電気容量 $\boldsymbol{C''}$ は $\left(C=\dfrac{\varepsilon S}{d}\right)$ より，

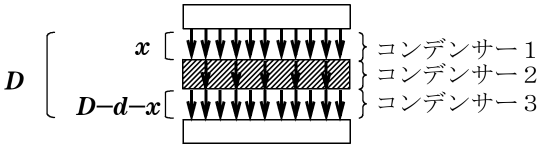
$$C''=\frac{\varepsilon S}{D-d}=\frac{d}{D-d}C$$

となり，先ほど計算した電気容量と同じ値になります。ですので，導体が挿入されたコンデンサーの電気容量は，導体部分をそのまま引っこ抜いてできたコンデンサーの電気容量を調べることで求まります。

□ pick up words
・静電誘導
・電気力線
・合成容量

⑤　誘電体の挿入

電気容量 $\boldsymbol{C}$（$=\frac{\varepsilon S}{D}$）のコンデンサーに極板と面積が等しく，厚さ $\boldsymbol{d}$ の誘電体を挿入します。誘電分極によって，誘電体内の電場の一部が打ち消され，コンデンサー内には次のような電気力線が生じています。

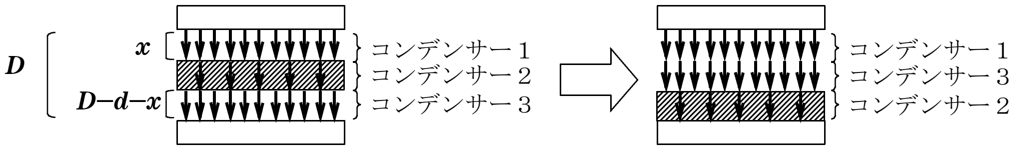


このとき，コンデンサー１～コンデンサー３が直列に繋がれていると考えることができます。コンデンサー１～３の電気容量は（$C=\frac{\varepsilon S}{d}$）より，それぞれ $\frac{\varepsilon_0 S}{x}$，$\frac{\varepsilon S}{d}$，$\frac{\varepsilon_0 S}{D-d-x}$ となる（誘電体の誘電率を ε）ので，合成容量 C' は，

$$\frac{1}{C'}=\frac{x}{\varepsilon_0 S}+\frac{d}{\varepsilon S}+\frac{D-d-x}{\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon(D-d)+\varepsilon_0 d}{\varepsilon_0\varepsilon S}\Leftrightarrow C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{\varepsilon D-(\varepsilon-{}_0\varepsilon)d}$$

となります。

次の図のように，コンデンサー２とコンデンサー３の順番を変えても，同じように電気容量を求めることができます。



このときの電気容量 C'' は（$C=\frac{\varepsilon S}{d}$）より，

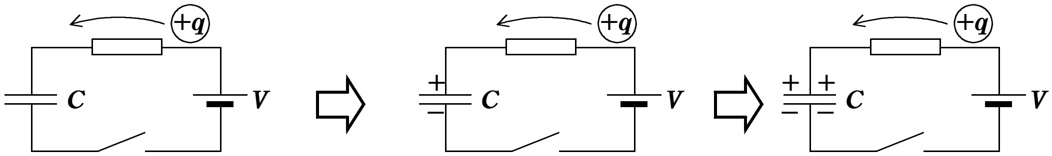
$$\frac{1}{C'}{}'=\frac{D-d}{\varepsilon_0 S}+\frac{d}{\varepsilon S}=\frac{\varepsilon(D-d)+\varepsilon_0 d}{\varepsilon_0\varepsilon S}\Leftrightarrow C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{\varepsilon D-(\varepsilon-\varepsilon_0)d}$$

となり，先ほど計算した電気容量と同じ値になります。

□ pick up words
・誘電分極
・合成容量
・電気力線

⑥　静電エネルギー

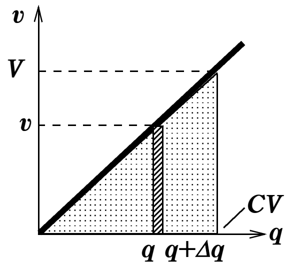
電気容量Cのコンデンサーに電圧Vの電池をつなぎ，完全に充電します。このとき，コンデンサーに電気を蓄えるために外部から仕事をして電気を運ばないといけません。このときの仕事がコンデンサーにエネルギーとして蓄えられることになります。このエネルギーを静電エネルギーといいます。静電エネルギーを求めてみましょう。



上の図を見てみると，最初はコンデンサーに電気が蓄えられていませんので簡単に電気が移動します。しかし，中央や右の図のように電気が蓄えられていくと，極板に電気が蓄えられ斥力を受け電気が蓄えられにくくなります。しかし，これに逆らって電気が仕事をしているので電気がどんどん蓄えられていきます。

中央の図でコンデンサーに蓄えられている電気量を q とすると，（$Q=CV$）より，コンデンサーにかかる電圧 v は$v=\dfrac{q}{C}$となります。この状態から Δq[C]の電荷をさらに運ぶ間，コンデンサーの電圧が v のまま変わらないものとすると，コンデンサーの電場に逆らって電荷を運んだ仕事 Δw は，（$W=qV$）より，$\Delta w=\Delta q\times v=\dfrac{q\Delta q}{C}$となります。

コンデンサーには電圧が電池の電圧と等しくなるまで電気が運ばれるので，充電が完了したコンデンサーには（$Q=CV$）より，CV の電気量が蓄えられています。縦軸を$\dfrac{q}{C}$（電圧），横軸を q としたグラフで表すと図のような直線になり，Δw は図中の長方形の面積を表しています。したがって，コンデンサーの電気量が 0 から CV になるまでに電気を運ぶのに必要な仕事はこの長方形を集めたものになります。つまり，図中の三角形の面積になっているので，求める仕事 W は$W=\dfrac{1}{2}CV\times V=\dfrac{1}{2}CV^2$となります。この仕事がコンデンサーに蓄えられる静電エネルギーとなります。



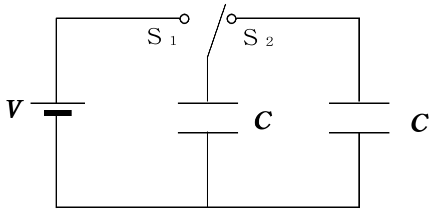
※静電エネルギーは（$Q=CV$）を用いて，次のように変形することができます。

$$\boxed{U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

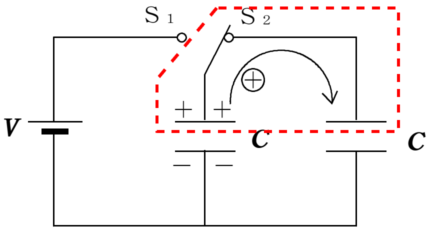
□ pick up words
・$W=qV$
・電池のした仕事
・極板間引力

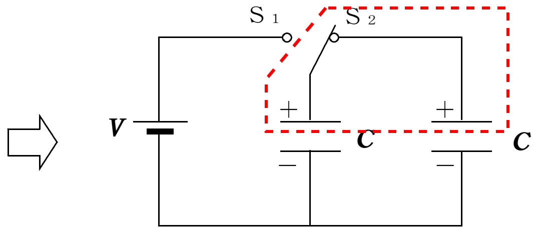
⑦　つなぎ替え問題

図のような，電圧 $\boldsymbol{V}$ の電池，電気容量 $\boldsymbol{C}$ のコンデンサー，および，スイッチからなる回路を考えます。スイッチをＳ₁につなぐと，左側のコンデンサーに電流が流れ充電されます。十分時間が経過すると，左側のコンデンサーに蓄えられる電気量は $\boldsymbol{CV}$ となります。



次にスイッチをＳ₂につなぎます。このとき，図のように電気が移動します。





十分に時間が経過すると，両方のコンデンサーの電圧が等しくなります。この電圧を $\boldsymbol{V'}$ とします。また，右の図で点線で囲んだ部分はスイッチをＳ₂につないでからはどことも触れていません。したがって，電気量の合計は変わりません。このように，外部と遮断され電気量の和が保存されているところを絶縁部分と言います。絶縁部分について電気量保存則を立てると次のようになります。

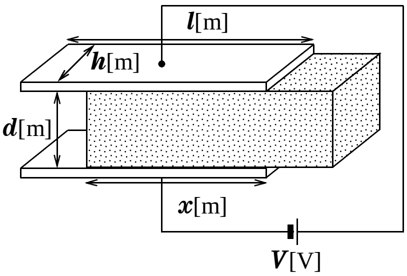
$$\boldsymbol{CV'+CV'=CV+0}$$

これより，充電後のコンデンサーの電圧が $\boldsymbol{V'=\frac{V}{2}}$ となることが分かります。

問　上記の状態から再びスイッチをＳ₁につなぎ十分時間が経過してから，スイッチをＳ₂につなぎました。十分時間が経過したとき，コンデンサーにかかる電圧を求めましょう。

⑧誘電体の挿入とエネルギー変化

図のような幅 $\boldsymbol{l}$[m]，奥行き $\boldsymbol{h}$[m]の金属板を真空中に $\boldsymbol{d}$[m]離れて平行に置きコンデンサーを作りました。このコンデンサーに電圧 $\boldsymbol{V}$[V]の電池をつなぎ，厚さ $\boldsymbol{d}$[m]の誘電率 $\boldsymbol{\varepsilon}$[F/m]の誘電体を $\boldsymbol{x}$[m]だけ挿入しました。真空中の誘電率を ε_0[F/m]とすると，誘電体を挿入する前のコンデンサーの電気容量は $\dfrac{\varepsilon_0 hl}{d}$ となります。また，誘電体を挿入した後の電気容量は $\dfrac{\varepsilon_0 h(l-x)}{d}+\dfrac{\varepsilon hx}{d}=\dfrac{\varepsilon_0 hl+(\varepsilon-\varepsilon_0)hx}{d}$ となります。



この状態から誘電体をさらに Δx[m]だけゆっくりと挿入します。電池がつながれたままなのでコンデンサーにかかる電圧は $\boldsymbol{V}$[V]だと考えると，コンデンサーの静電エネルギーの変化量は次のようになります。

$$\Delta U=\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hV^2}{d}\Delta x$$

問　誘電体を Δx[m]だけゆっくりと挿入したとき，電池のした仕事と外部から誘電体にした仕事を求めなさい。

☐ pick up words
・$W=qV$
・電池のした仕事
・静電エネルギー