物理のこれだけはできないと「やばい」問題集

No.4

落体の運動編

ブツリヨキワメヨ

1

(1)　初速度 0[m/s]，加速度 g[m/s^2]

(2)　$\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\ [\mathrm{s}]$$

(3)　$(v=v_0+at)$ より，

$$g\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{2gh}\ [\mathrm{m/s}]$$

または，$(v^2-v_0{}^2=2aS)$ より，求める速さを v とすると，

$v^2=2gh \Leftrightarrow v=\sqrt{2gh}$

※３公式の１つ $(v^2-v_0{}^2=2aS)$ は，他の２つの式と比べて式的に意味はありません。ただ，時間を使うことがなければ使用でき，かつ，計算が楽になるといったものです。速く正確に解くためにも使い分けできるようにしましょう。

2

(1)　初速度 0[m/s]，加速度 9.8[m/s^2]

(2)　$\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$\frac{1}{2}\times 9.8\times 3^2=44.1\rightarrow 4.4\times 10\ [\mathrm{m}]$$

(3)　$(v=v_0+at)$ より，

$9.8\times 3=29.4\rightarrow 2.9\times 10$ [m/s]

3

(1)　$\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$\frac{1}{2}\times 9.8\times 3^2=44.1\rightarrow 4.4\times 10\ [\mathrm{m}]$$

(2)　$(v=v_0+at)$ より，

$9.8\times 3=29.4\rightarrow 2.9\times 10$ [m/s]

(3)　追いついた時のＡとＢの落下距離が等しいことから考える。Ｂの初速度を v として，$\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$\frac{1}{2}\times 9.8\times 3^2=v\times 2+\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2$$

$v=12.25\rightarrow 1.2\times 10$ [m/s]

4

(1)　最高点では折り返し地点となり，速さが **0** となる。したがって，($v=v_0+at$) より，

$$0=v+(-g)t \Leftrightarrow t=\frac{v}{g}$$

(2)　(1) で求めた時刻を用いて，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，最高点の高さを h として，

$$h=v\times\frac{v}{g}+\frac{1}{2}(-g)\left(\frac{v}{g}\right)^2=\frac{v^2}{2g}$$

または，($v^2-v_0{}^2=2aS$) より，

$$v^2=2gh \Leftrightarrow h=\frac{v^2}{2g}$$

(3)　地面に戻ってくるので変位が **0** となる。したがって，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$0=vt-\frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t=\frac{2v}{g}\ \mathrm{[s]}$$

または，運動の対称性から，(1) で求めた時間の **2** 倍になることから求める。

(4)　(3) で求めた時刻から，($v=v_0+at$) より，

$$v+(-g)\times\frac{2v}{g}=-v$$

速さなので，答えは v[m/s] となる。

5

(1)　最高点では折り返し地点となり，速さが **0** となる。したがって，($v=v_0+at$) より，

$$0=14.7+(-9.8)\times t \Leftrightarrow t=1.5\ \mathrm{[s]}$$

(2)　上向きを正として考えると，変位が **−19.6** になることに注意して，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$-19.6=14.7t+\frac{1}{2}(-9.8)t^2 \Leftrightarrow (t-4)(t+1)=0 \Leftrightarrow t=4,\ -1$$

題意から考えて，答えは **4.0**[s] となる。

(3)　(2) で求めた答えと，($v=v_0+at$) より，

$$14.7+(-9.8)\times 4.0=-24.5\rightarrow -2.5\times 10$$

速さなので，答えは **2.5 × 10**[m/s] となる。

6

(1)　下向きを正にして考えて，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$\frac{1}{2}gt^2$$

(2)　上向きを正にして考えて，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$vt+\frac{1}{2}(-g)t^2=vt-\frac{1}{2}gt^2$$

(3)　上向きを正として，２物体の速度を求めると，($v=v_0+at$) より，

物体Ａ：$-gt$

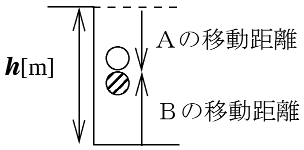
物体Ｂ：$v-gt$

物体Ｂから見た物体Ａの相対速度は，「見られる方（A)」－「見る方（B)」より，

$(-gt)-(v-gt)=-v$（上向き正）

したがって，Ｂから見たＡの速度は下向き（近づいてくる向きに）v[m/s]で，近づいているように見える。

(4)　衝突した時の図から考えて，物体Ａと物体Ｂの移動距離の和が h になっている。(1)と(2)で求めた答えの和が h になることから，



$$vt-\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}gt^2=h$$

$$\therefore t=\frac{h}{v}$$

□■物理的思考■□
(3)の答えから，物体Ｂと物体Ａは一定の速さ v[m/s]で近づいていることが分かる。ＡＢ間の距離が h[m]だったことから，距離と速さから $\frac{h}{v}$ と求まる。

7

(1)　上向きを正にして考えて，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$vt+\frac{1}{2}(-g)t^2=vt-\frac{1}{2}gt^2$$

(2)　上向きを正にして考えて，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$Vt+\frac{1}{2}(-g)t^2=Vt-\frac{1}{2}gt^2$$

(3)　上向きを正として，２物体の速度を求めると，($v=v_0+at$) より，

物体Ａ：$v-gt$

物体Ｂ：$V-gt$

物体Ｂから見た物体Ａの相対速度は，「見られる方（A)」－「見る方（B)」より，

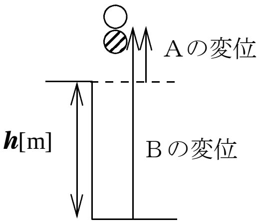
$(v-gt)-(V-gt)=-(V-v)$（上向き正）

したがって，Ｂから見たＡの速度は下向き（近づいてくる向きに）$V-v$[m/s]で，近づいているように見える。

(4)　衝突した時の図から考えて，物体Ｂの変位と物体Ａの変位の差が h になっている。(1)と(2)で求めた答えの差が h になることから，

$$Vt-\frac{1}{2}gt^2-(vt-\frac{1}{2}gt^2)=h$$

$$\therefore t=\frac{h}{V-v}$$



□■物理的思考■□
(3)の答えから，物体Bと物体Aは一定の速さ $V-v$[m/s]で近づいていることが分かる。ＡＢ間の距離が h[m]だったことから，距離と速さから $\frac{h}{V-v}$ と求まる。

(5)　最高点では折り返し地点となり，速さが0となる。したがって，($v=v_0+at$) より，

$$0=v+(-g)t \Leftrightarrow t=\frac{v}{g}$$

この時刻が(4)で求めた時刻より大きい時に題意を満たすので，

$$\frac{v}{g}>\frac{h}{V-v} \Leftrightarrow V>v+\frac{gh}{v}$$

8

【考え方のポイント】
　初速度と加速度を水平方向と鉛直方向に分解すると，次のようになる。水平方向と鉛直方向のそれぞれの方向について別々に，等加速度運動の３公式を立てて考える。

	水平（x 成分）	鉛直（x 成分）
初速度	14.7	0
加速度	0	9.8

(1)　鉛直方向の運動に注目して，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$19.6=\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2 \Leftrightarrow t=2.0\,[\mathrm{s}]$$

(2)　水平方向の運動に注目して，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$14.7\times 2.0=29.4\rightarrow 2.9\times 10\,[\mathrm{m/s}]$$

(3)　鉛直方向、水平方向の運動にそれぞれ注目して，($v=v_0+at$) より，
水平方向：14.7
鉛直方向：$9.8\times 2.0=19.6$
となるので，３平方の定理より，$24.5\rightarrow 2.5\times 10$[m/s]と求まる。
※比で考えると，3：4：5 が使える。

9

(1)　鉛直方向の運動に注目して，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$$H=\frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

(2)　水平方向の運動に注目して，$\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$v\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

(3)　鉛直方向、水平方向の運動にそれぞれ注目して，$(v=v_0+at)$ より，

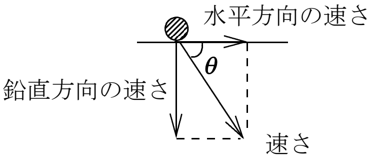
水平方向：v

鉛直方向：$g\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{2gH}$

となるので，３平方の定理より，$\sqrt{v^2+2gH}$ と求まる。

(4)　図より，

$$\tan\theta=\frac{(\text{鉛直方向の速さ})}{(\text{水平方向の速さ})}=\frac{\sqrt{2gH}}{v}$$



10

(1)　水平方向の運動に注目して，$\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$vT=L \Leftrightarrow v=\frac{L}{T}$$

(2)　鉛直方向、水平方向の運動にそれぞれ注目して，$(v=v_0+at)$ より，

水平方向：$\frac{L}{T}$

鉛直方向：gT

水平方向の速さと鉛直方向の速さと３平方の定理より，

$$\sqrt{\left(\frac{L}{T}\right)^2+(gT)^2}$$

(3)　**9** (4) と同様に考えて，

$$\tan\theta=\frac{(\text{鉛直方向の速さ})}{(\text{水平方向の速さ})}=\frac{gT}{\frac{L}{T}}=\frac{gT^2}{L}$$

11

(1)　初速度を水平方向と鉛直方向に分解すると，

水平方向：$v\cos\theta$

鉛直方向：$v\sin\theta$

(2)　最高点では鉛直方向の速さが 0 なので，鉛直方向について，$(v=v_0+at)$ より，

$$0=v\sin\theta+(-g)t \Leftrightarrow t=\frac{v\sin\theta}{g}$$

ここで求めた時間と $\left(S=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$ より，

$$v\sin\theta\frac{v\sin\theta}{g}+\frac{1}{2}(-g)\left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2=\frac{(v\sin\theta)^2}{2g}$$

または，$(v^2-v_0{}^2=2aS)$ より，

$$0-(v\sin\theta)^2=2(-g)h \Leftrightarrow \frac{(v\sin\theta)^2}{2g}$$

(3)　最高点では鉛直方向の速さが 0 なので，水平方向の速さだけとなる。水平方向の加速度は 0 なので最初と同じなので，$v\cos\theta$ となる。

(4)　物体が点Ｂに到達する時間は鉛直方向の変位が 0 となることから求められる。したがって，鉛直方向について，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$0=v\sin\theta t'+\frac{1}{2}(-g)t'^2 \Leftrightarrow \frac{g}{2}t'(t'-\frac{2v\sin\theta}{g}) \Leftrightarrow t'=0,\ \frac{2v\sin\theta}{g}$$

題意から考えて，点Ｂの到達時刻は $\frac{2v\sin\theta}{g}$ と求まる。

（※最高点を境とした運動の対称性から $\frac{v\sin\theta}{g}\times 2$ と考えてもよい。）

ここで求めた時刻を用いて，水平方向について，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$v\cos\theta\frac{2v\sin\theta}{g}=\frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v^2\sin2\theta}{g}$$

※数学の公式 $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$ を利用している。（問題集 No.1 で既出）

(5)　$\sin2\theta$ は $2\theta=90°$ で最大値 1 をとるので，$\theta=45°$ で最大値をとる。そのときの飛距離は，

$$\frac{v^2}{g}$$

12

(1)　最高点では鉛直方向の速さが 0 なので，鉛直方向について，（$v=v_0+at$）より，

$$0=19.6\sin60°+(-9.8)t \Leftrightarrow t=\sqrt{3}\ [\mathrm{s}]$$

ここで求めた時間と（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$19.6\sin60°\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times(\sqrt{3})^2=14.7\rightarrow 1.5\times 10\ [\mathrm{m}]$$

(2)　最高点では鉛直方向の速さが 0 なので，水平方向の速さだけとなる。水平方向の加速度は 0 なので最初と同じなので，$19.6\cos60=9.8$［m/s］となる。

(3)　物体が点Ｂに到達する時間は鉛直方向の変位が 0 となることから求められる。したがって，鉛直方向について，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$0=19.6\sin60\times t'+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times t'^2 \Leftrightarrow t'(t'-2\sqrt{3}) \Leftrightarrow t'=0,\ 2\sqrt{3}$$

題意から考えて，点Ｂの到達時刻は $2\sqrt{3}$［s］となる。ここで求めた時刻を用いて，水平方向について，（$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$）より，

$$19.6\cos60\times 2\sqrt{3}=19.6\sqrt{3}=33.9\ldots \Leftrightarrow 3.4\times 10\ [\mathrm{m}]$$

13

(1)　初速度の水平成分と鉛直成分をそれぞれ v_1，v_2 とし，壁に衝突する時刻を t とする。壁に垂直に衝突することから，このとき，速さの鉛直成分 0 と分かる。($v=v_0+at$) より，

$0=v_2+(-9.8)t \Leftrightarrow v_2=9.8t$…①

また，それぞれの方向について，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

水平：$10=v_1t$…②

鉛直：$10=v_2t+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times t^2$…③

①～③式を用いて計算すると，

$t=\frac{10}{7}\rightarrow 1.4$[s]($v_1=7.0$，$v_2=1.4\times 10$[m/s])

(2)　初速度と水平方向とのなす角が θ なので，

$\tan\theta=\frac{v_2}{v_1}=\frac{14}{7.0}=2.0$

(3)　三平方の定理，または，辺の比より，

$7.0\times\sqrt{5}\rightarrow 1.6\times 10$[m/s]

14

(1)　球Bの水平方向の変位が l なので，水平方向について，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$l=v\cos\theta\times t \Leftrightarrow t=\frac{l}{v\cos\theta}$

(2)　球Aの変位は，下向きを正として，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$\frac{1}{2}g(\frac{l}{v\cos\theta})^2$

したがって，最初の位置から考えて，y 座標は，

$h-\frac{1}{2}g(\frac{l}{v\cos\theta})^2$

(3)　球Bの変位は，鉛直方向について，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$v\sin\theta(\frac{l}{v\cos\theta})+\frac{1}{2}(-g)(\frac{l}{v\cos\theta})^2=l\tan\theta-\frac{1}{2}g(\frac{l}{v\cos\theta})^2$

(4)　衝突するので球Aと球Bは同じ位置にいないといけないので，イが正解。

(5)　(4)より，y 座標が同じ値になるので，(2)と(3)の答えが同じ値になることから，

$\tan\theta=\frac{h}{l}$

(6)　題意から，(2)または(3)で求めた値が 0 より大きければよい。

$h-\frac{1}{2}g(\frac{l}{v\cos\theta})^2>0 \Leftrightarrow v>\sqrt{\frac{gl^2}{2h\cos^2\theta}}$

または，

$$l\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v\cos\theta}\right)^2>0\Leftrightarrow v>\sqrt{\frac{gl}{2\cos^2\theta\,\tan\theta}}$$

15

(1)　水平方向について，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$x=vt$

(2)　鉛直方向について，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

$y=\frac{1}{2}(-g)t^2=-\frac{1}{2}gt^2$

(3)　(1) で求めた式を変形して，t を (2) で求めた式に代入して，

$y=-\frac{g}{2v^2}x^2$

※(1) と (2) の式から t を消去したとき，y を x で表した関数になっている。これが，物体の軌道を表している。二次関数が放物線と言われる所以もこれで理解できる。

(4)　$45°$ の斜面に着地するとき，$y=-x$ を満たしているので，(1) と (2) より，

$-\frac{1}{2}gt^2=-vt\Leftrightarrow t=0,\ \frac{2v}{g}$

求めた t を (1) または (2) に代入すると，

$\frac{2v^2}{g}$

※(3) で求めた軌道方程式を用いることもできる。斜面が $45°$ なので，斜面を関数で表すと，$y=-x$ となる。この２つの関数の交点が衝突点となるので，

$-\frac{g}{2v^2}x^2=-x\Leftrightarrow x=0,\ \frac{2v^2}{g}$

16

(1)　速さ V で上昇している気球上の人から見て速さ v で物体を投げ上げるので，地上の人から見ると速さ $v+V$ で物体を投げ上げている。

※相対速度を使って考えることもできる。地上からみた物体の投げ上げ速度を v'とすると′気球の人から見た物体の投げ上げ速度 v は，「見られる方（物体)」－「見る方（気球内の人)」より，$v=v'-V$ となる。これより，$v'=v+V$ と求まる。

(2)　最高点では折り返し地点となり，速さが 0 となる。したがって，($v=v_0+at$) より，

$0=v+V+(-g)t\Leftrightarrow t=\frac{v+V}{g}$

(3)　気球内の人が物体を受け取るのは，気球と物体の変位が等しくなるときなので，($S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$) より，

気球の変位：Vt'…①

物体の変位：$(v+V)t'+\frac{1}{2}(-g)t'^2$…②

２式が等しくなることから，

$t' = \frac{2v}{g}$

(4)　(3) で求めた答えを①式に代入して，

$\frac{2vV}{g}$

(5)　（$v = v_0 + at$）より，$v - gt$

(6)　最高点では折り返し地点となり，速さが 0 となる。(5) の答えを用いて，

$\frac{v}{g}$

(7)　物体を受け取るときは，気球内の人から見ると物体の変位が 0 となるときなので，（$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$）より，

$0 = vt'' + \frac{1}{2}(-g)t''^2 \Leftrightarrow t'' = 0,\ \frac{2v}{g}$

よって，答えは $\frac{2v}{g}$ となる。

□■物理的思考■□
(3) と (7) の答えは同じになっているが，(2) と (6) の答えは違う。前者は気球内の人が物体を受け取るときなので，気球内の人から見ても，地上の人からみても変わらない。ところが，後者は違う。気球は速さ V で上昇しているので，気球内の人から見て物体が最高点のに到達する，つまり，速さが 0 になるのは，物体の速さが V となるときである。一方，地上の人から見た最高点は，地上の人は静止しているので，物体が速さ 0 となるときとなる。この違いが答えの違いにつながる。